

1  $G = S_4$ ,  $K = \{\sigma \in G; \sigma(4) = 4\}$  とするとき、 $G/K$  の代表系を一つ与えよ。

$G = S_4$  の集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  への自然な作用を考えると、 $K = G(4)$  であるから、全単射

$$G/G(4) \ni \sigma G(4) \mapsto \sigma \cdot 4 \in X$$

により、 $G/K$  の代表系は、 $4 \in X$  を  $1, 2, 3, 4$  に移す置換の集まりとして与えられる。具体的には、互換と単位置換の集まりとして、 $\{(14), (24), (34), e\}$  が求める代表系の一つである。

2  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$  に対して、Lagrange 対応を具体的に与えよ。

$$G(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

であるから、その右剰余類は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} G(f), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} G(f), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} G(f)$$

で与えられる。

一方、

$$Gf = \{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1\}$$

であり、

$$f = x_1 + x_2, (123)f = x_2 + x_3, (23)f = x_3 + x_1$$

であるので、求める Lagrange 対応は

$$G(f) \mapsto f, (23)G(f) \mapsto (23)f, (123)G(f) \mapsto (123)f$$

である。