4　群作用

サイズが $m \times n$ の行列全体のベクトル空間を $M(m,n,\mathbb{C})$ で表す。このとき行列の積から定まる写像、$GL(m,\mathbb{C}) \times M(m,n,\mathbb{C}) \to M(m,n,\mathbb{C})$ あるいは、$M(m,n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}) \to M(m,n,\mathbb{C})$ は、「結合法則」をみたす。

より一般に、群 G の集合 X への**左作用** (left action) とは、G の要素 $g \in G$ と集合 X の要素 $x \in X$ を与えるごとに、X の要素 $\varphi(g,x) \in X$ が次の条件を満たすように定められていることをいう。

(i) $\varphi(g,\varphi(h,x)) = \varphi(gh,x)$, $g,h \in G$, $x \in X$,

(ii) $\varphi(e,x) = x$, $x \in X$.

いいかえると、G の X への左作用とは、写像 $\varphi : G \times X \to X$ で、上の関係をみたすもののことである。与えられた作用 φ に対して、$\varphi(g,x)$ は通常

$$\varphi(g,x) = gx$$

と積の記号を使って略記される。この記法によれば、上の条件は、結合法則 $g(hx) = (gh)x$ と単位元の性質 $ex = x$ の形になり、見やすい。

どうように、群 G の集合 X への**右作用** (right action) を、写像 $\psi : X \times G \to X$ で、(i) $\psi(\psi(x,g),h) = \psi(x,gh)$, (ii) $\psi(x,e) = x$ となるものと定義する。この場合も、$\psi(x,g) = xg$ と略記すれば、右作用の条件は、$(xg)h = x(gh)$, $xe = x$ となる。

２つの群 G, H があり、集合 X に G は左から作用し、H が右から作用していて、

$$(gx)h = g(xh)$$

が成り立つとき、**双作用**（biaction）であるという。

群 G が集合 X に左から作用しているとき、X の部分集合 S と群 G の元 g に対して、

$$gS = \{gx; x \in S\}$$

という記号をつかう。

図形 S の g による変換の結果が gS である。

例 4.1. $O(n)$ は S^{n-1} に作用する。

例 4.2. 与えられた左作用 $G \times X \to X$ に対して、関数空間への作用。とくに、$G = S_n$, $X = \{1, \dots, n\}$ とすれば、X 上の関数空間は数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と同一視され、S_n の $\mathbb{C}^n$ への左作用

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

を得る。

例 4.3. 変数変換群 $\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n)$ は、$\mathbb{R}^n$ の上の微分作用素の作る空間（非可換環）$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ へ自然に作用する。とくに、一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$ も $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に作用する。

与えられた作用に対して、$Gx = \{gx \in X; g \in G\}$ の形の部分集合を x の群 G （の作用）による**軌道** (orbit) とよぶ。

例 4.4.

(i) $O(2)$ の $\mathbb{R}^2$ への作用による軌道は、同心円。

(ii) $O(3)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用による軌道は、同心球面。

(iii) ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に $\mathbb{R}_+$ を積で作用させるとき、その軌道は、原点かまたは半直線である。したがって、軌道空間は、球面 $S^{n-1} = \{x; |x| = 1\}$ に原点を付け加えたものと同一視できる。

作用をさらに $\mathbb{R}^\times$ にまで広げると、その軌道空間は、球面上の対点を同一視したものとなる。これを実射影空間といって $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ と書く。同様に、複素射影空間を $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^\times$ で定める。

例 4.5. ベクトル空間 V の基底全体の集合 B は、自然な $\mathrm{GL}(V)$-$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 双作用をもつ。

補題 4.6. $Gx \neq Gy$ ならば $Gx \cap Gy = \emptyset$.

同値関係 $x \sim y$ を

$$x \sim y \iff Gx = Gy$$

で定めると、同値類は軌道と同じことになる。この同値関係による商集合を**軌道空間** (orbit space) とよび、記号 $G \backslash X$ で表す。

同値関係と集合の分割、disjoint union、代表系について復習（「集合論入門」）。

右作用 $X \times H \to X$ の場合にも、その軌道空間 X/H を同じように定義する。

問 14. 右作用の場合の同値関係の定義を与えよ。

命題 4.7 (Orbital Decomposition).

$$X = \bigsqcup_{[x] \in G\backslash X} Gx.$$

命題 4.8. 双作用 $G \times X \times H \to X$ が与えられると、$G\backslash X$ は H の自然な右作用をもち、X/H は G の自然な左作用をもち、さらに自然な同一視

$$G\backslash(X/H) = G\backslash X/H = (G\backslash X)/H$$

が存在する。

例 4.9. $O(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用による軌道は、同心球面からなり、したがって各軌道はその半径で区別され、

$$O(n)\backslash\mathbb{R}^n = [0, +\infty)$$

と同一視される。（たまねぎの皮。）

全ての軌道が一致してしまうような作用を**推移的** (transitive) であるという。

例 4.10. $O(n)$ の S^{n-1} への作用は推移的。

群の自分自身への作用、左移動、右移動、双移動。これらはどれも推移的である。一方、G の G 自身への作用 φ を

$$\varphi(g)(g') = gg'g^{-1}$$

で定めると、これは G が自明でない限り、推移的にならない。この作用を共役作用と呼ぶことにする。G の 2 つの元、a, b が共役作用に関して同一の軌道にあるとき、すなわち $a = gbg^{-1}$ となる $g \in G$ が存在するとき、a と b は**共役**である (conjugate) という。また、共役作用による軌道を**共役類** (conjugacy class) という。

例 4.11. $G = GL(n, \mathbb{C})$ において、対角可能な行列 A, B が共役であるための必要十分条件は、A の固有値と B の固有値が重複度も含めて一致することである。

問 15. $SL(2, \mathbb{C})$ の共役類を全て求めよ。

作用 $G \times X \to X$ に対して、$gx = x$ for all $g \in G$ となる $x \in X$ を**不動点** (fixed point) とよぶ。あるいは、x は G の作用で不変である (invariant) という。上の群自身への作用はどれも不動点をもたない。

例 4.12. 作用 $O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の不動点は原点のみ。作用 $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ は不動点をもたない。

例 4.13. 2変数の微分可能関数 $f(x, y)$ が、回転群 SO_2 の作用で不変であるとき、

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

である。

集合 X の点 $x \in X$ に対して、

$$G(x) = \{g \in G; gx = x\}$$

を点 x における G の**安定部分群** (stabilizer) とよぶ。

軌道と安定部分群の概念は、ある意味で相補的な関係 (reciprocal) にある。(下の命題参照。)

問 16.

(i) 安定部分群は実際部分群になっている。これを確かめよ。

(ii) $G(gx) = gG(x)g^{-1}$ を示せ。

問 17. $GL(2, \mathbb{R})$ の微分作用素環への作用に関して、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

における安定部分群をそれぞれ求めよ。

例 4.14. 作用 $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の点 $(0, 0, 1)$ における安定部分群は、z-軸の廻りの回転全体。$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の点 $(0, 1)$ における安定部分群は自明な (trivial) ものである。

点 $x \in X$ が不動点であるということと、$G(x) = G$ は同じ事。

不動点と対極の性質として、

$$G(x) = \{e\}$$

となる点 x を自由点 (free point) とよぶことにする。すべての点が自由点であるような作用を**自由作用** (free action) とよぶ。

例 4.15. 群の自分自身への左作用、右作用では全ての点が自由点であるが、双作用は自由点をもたない。

補題 4.16. 自由点 $x \in X$ に対して、

$$G \ni g \mapsto gx \in Gx$$

は双射である。とくに $|Gx| = |G|$ である。

定義 4.17. 群 G とその部分群 H に対して、左作用、右作用を H に制限した作用 $H \times G \to G$, $G \times H \to G$ 関する $g \in G$ の軌道を、g の（H に関する）**右剰余類** (right coset)、**左剰余類** (left coset) とよぶ。

これらは、G の部分集合として

$$Hg, \qquad gH$$

の形をしている。

また、それぞれの軌道空間を $H \backslash G$, G/H と書き、右剰余類空間 (right coset space)、左剰余類空間 (left coset space) とよぶ。このとき、

$$G = \bigsqcup_{[g] \in G/H} gH$$

という分解（分割）から

$$|G| = |G/H||H|$$

という等式を得る。

命題 4.18. 剰余類空間 G/H には、G が自然に左から作用し、点 $x = gH$ における安定部分群は $G(x) = gHg^{-1}$ で与えられる。とくに $x = H$ のときは、$G_x = H$ である。

逆に、与えられた左作用 $G \times X \to X$ に対して、自然な双射

$$G/G(x) \to Gx$$

が存在し、G の左作用を保つ。

定理 4.19. 有限群 G の有限集合 X への作用について、

$$|X| = \sum_{[x] \in G \backslash X} \frac{|G|}{|G(x)|}$$

が成り立つ。