$\boxed{1}$ 半球面 $x^2+y^2+z^2=1,\ z\leq 0$ に原点から外に向かう向きをいれたものを S とする。

(i) 曲面 S のパラメータ表示を与えよ。

(ii) ベクトル場 $\overrightarrow{F}=(0,0,1)$ の曲面 S に関する面積分を求めよ。

(i) 球面座標による表示を考えると、

$$\overrightarrow{r}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\quad 0\leq\theta\leq\pi, 0\leq\phi\leq 2\pi$$

であるが、$z\leq 0$ という条件を表わす範囲は、$\pi/2\leq\theta\leq\pi$ となる。次に、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}_\theta &= (\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta),\\ \overrightarrow{r}_\phi &= (-\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,0)\end{aligned}$$

より得られる法線ベクトル

$$\overrightarrow{r}_\theta\times\overrightarrow{r}_\phi=\sin\theta(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$$

の向きであるが、$\sin\theta\geq 0$ に注意すれば、正しい方向（原点から見て外向き）を向いていることがわかる。以上により求めるパラメータ表示は、

$$\overrightarrow{r}(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\quad \pi/2\leq\theta\leq\pi, 0\leq\phi\leq 2\pi$$

で与えられることがわかる。

(ii) (i) で得たパラメータ表示を使って面積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\iint_S \overrightarrow{F}\cdot(\overrightarrow{r}_\theta\times\overrightarrow{r}_\phi)d\theta d\phi &= \iint_{\pi/2\leq\theta\leq\pi,0\leq\phi\leq 2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta d\phi\\ &= \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(2\theta)\,d\theta\\ &= -\pi.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(i) 座標空間内の 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ の作る三角形 $\triangle ABC$ のパラメータ表示を与えよ。

(ii) (i) で求めたパラメータ表示から定まる向きを $\triangle ABC$ に入れたものを T とするとき、ベクトル場 $\overrightarrow{G} = (x, y, 0)$ の曲面 T に関する面積分を求めよ。

(i) $\triangle ABC$ 内の点 $P(x, y, z)$ は、

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}, \quad s, t \geq 0, s + t \leq 1$$

と表わされるので、

$$\overrightarrow{r}(s,t) = (x,y,z) = (3-2s-t, 1+s+2t, 2+s-t), \quad (s,t) \in D = \{(s,t); s,t \geq 0, s+t \leq 1\}$$

が求めるもの（の一つ）である。

(ii) (i) で与えたパラメータ表示を使うと、

$$\overrightarrow{r}_s = (-2, 1, 1), \quad \overrightarrow{r}_t = (-1, 2, -1), \quad \overrightarrow{r}_s \times \overrightarrow{r}_t = (-3, -3, -3)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\iint_T \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} &= \iint_D \overrightarrow{G} \cdot (\overrightarrow{r}_s \times \overrightarrow{r}_t)\, ds\, dt \\
&= -3 \iint_D (x + y)\, ds\, dt \\
&= -3 \int_0^1 \int_0^{1-t} (4 - s + t)\, ds\, dt \\
&= -3 \int_0^1 \left[(4 + t)s - \frac{1}{2}s^2 \right]_{s=0}^{s=1-t} dt \\
&= -\frac{3}{2} \int_0^1 (7 - 4t - 3t^2)\, dt \\
&= -6.
\end{aligned}$$