$\boxed{1}$ ベクトル場 $F(x,y)=(xy,x-y)$ と領域 $D=\{(x,y);0\le x,0\le y,x+y\le 1\}$ に対して、グリーンの定理が成り立つことを確かめよ。

$\partial D=C_1+C_2+C_3$, C_1:$(x,y)=(t,0)$ $(0\le t\le 1)$, C_2:$(x,y)=(1-t,t)$ $(0\le t\le 1)$, C_3:$(x,y)=(0,1-t)$ $(0\le t\le 1)$ であるから、

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} xydx+(x-y)dy &= \int_{C_1+C_2+C_3} xydx+(x-y)dy \\ &= 0+\int_0^1\{(1-t)t(-dt)+(1-t-t)dt\}+\int_0^1(-1+t)(-dt) \\ &= \int_0^1 (2-4t+t^2)\,dt=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

一方、$D=\{(x,y);0\le x\le 1,0\le y\le 1-x\}$ であるから、

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)dxdy &= \iint_D (1-x)\,dxdy \\ &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy(1-x)=\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となって、一致する。

$\boxed{2}$ 曲線 $C:(\cos^3 t,\sin^3 t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ に対して、線積分

$$\int_C (ydx-xdy)$$

および C で囲まれた領域 D の面積を求めよ。

$x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\int_C (ydx-xdy) &= \int_0^{2\pi}\{\sin^3 t(-3\cos^2 t\,\sin t)-\cos^3 t(3\sin^2 t\,\cos t)\}dt \\ &= -3\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\cos^2 t\,dt=-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt \\ &= -\frac{3}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2\theta\,d\theta=-\frac{3}{8}\int_0^{4\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta \\ &= -\frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

一方、グリーンの定理により重積分を使って書き直すと、この線積分は、$-2|D|$ となるので、求める面積は、$3\pi/8$ である。