VAP4(2009/5/18)

$\boxed{1}$ 勾配ベクトル場 $F = \nabla f$ ($f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$) を具体的に計算した上で、線積分

$$\int_{C_1+C_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ。ただし、$C_1 : (t, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$、$C_2 : (1-t, t)$ $(0 \leq t \leq 2)$ とする。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2+1} - \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}(2x) = \frac{(-x^2+y^2+1)y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ の方は、x と y を入れ替えれば良いので ($f(x,y) = f(y,x)$ に注意)、

$$F(x,y) = \left(\frac{(-x^2+y^2+1)y}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{(-y^2+x^2+1)x}{(x^2+y^2+1)^2}\right).$$

勾配ベクトル場の線積分であるから、曲線の始点終点が問題。C_1 と C_2 は、点 $(1,0)$ でつながっているので、$C_1 + C_2$ の始点$=$ C_1 の始点$=$ $(0,0)$ であり、$C_1 + C_2$ の終点$=$ C_2 の終点$=$ $(-1,2)$ であることに注意すれば、

$$\int_{C_1+C_2} F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f(-1,2) - f(0,0) = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

なぜ、$f(x,y) =$ と置こうとせぬ。問題に書いていないからといって、そのままだらだらと計算する法があるものか。

$\boxed{2}$ 曲線 $C : (\cos t, t)$ $(\pi/2 \leq t \leq \pi)$ に対して、線積分

$$\int_C (ydx - xdy)$$

を求めよ。

$x = \cos t$, $y = t$ を代入して線積分を書き直すと、

$$\int_{\pi/2}^{\pi} td(\cos t) - \cos t dt = -\int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t \, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt.$$

$(t\cos t)' = \cos t - t \sin t$ すなわち、

$$\int t \sin t \, dt = \int \cos t \, dt - d(t \cos t)$$

に注意すれば、求める線積分の値は、

$$\Big[t \cos t\Big]_{\pi/2}^{\pi} - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt = \Big[t \cos t - 2 \sin t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 2 - \pi.$$