$\boxed{1}$ ベクトル場 $F(x,y)=(2xy-ay, x^2+x+y)$ が勾配ベクトル場であるように定数 a を定め、$\nabla f = F$ を満たす関数 $f(x,y)$ を求めよ。

Proof. たすき掛け微分の関係式より

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x+y) = 2x+1 = \frac{\partial}{\partial y}(2xy-ay) = 2x-a$$

を比較して、$a=-1$ を得る。このとき、$F=\nabla f$ をみたす関数 $f(x,y)$ があれば、

$$f_x = 2xy+y, \qquad f_y = x^2+x+y.$$

最初の式から、$f(x,y) = x^2y+xy+g(y)$ であり、これを二番目の式に代入すると $x^2+x+g'(y) = x^2+x+y$ すなわち $g'(y)=y$ であるので、これから $g(y)=y^2/2+c$ である。まとめると、

$$f(x,y) = x^2y+xy+\frac{1}{2}y^2+c$$

が求める関数である。 □

$\boxed{2}$ ベクトル場 $F(x,y)=(\sin(x+y), 2y)$ の特異点と特異点における線型化を求めよ。

Proof. 特異点は、

$$\sin(x+y)=0=2y \iff \sin x = 0, y=0$$

を解いて、$(x,y)=(n\pi,0)$ $(n\in\mathbb{Z})$. これを

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \cos(x+y), \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos(x+y),$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2$$

に代入すると、特異点 $(x,y)=(n\pi,0)$ における線型化は、

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-n\pi \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。 □