VAP10(2009/7/13)

$\boxed{1}$ 微分可能なベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ について、極限

$$\lim_{a\to+0}\frac{1}{a^3}\iint_{\partial V}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}$$

を求めよ。ただし、V は一辺の長さが a の立方体 V: $0\le x,y,z\le a$ を、

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0,0,0),\quad \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0,0),\quad \frac{\partial R}{\partial z}(0,0,0)$$

は学生番号の末尾の数字 3 個を表すものとする。

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+0}\frac{1}{a^3}\iint_{\partial V}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} &= \nabla\cdot\overrightarrow{F}(0\,,\,0\,,\,0)\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(0\,,\,0\,,\,0)+\frac{\partial Q}{\partial y}(0\,,\,0\,,\,0)+\frac{\partial R}{\partial z}(0\,,\,0\,,\,0).\end{aligned}$$

これに各々の学生番号末尾の数字 3 個を代入し和を求めれば良い。

$\boxed{2}$ 円柱 $x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le\pi$ とベクトル場 $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x+y, y-x, \cos z)$ について、発散定理がなりたつことを具体的に確かめよ。

まず 3 重積分から求める。条件より、

$$V = \{(x,y,z)\,;-1\le x\le 1\,,\,-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\,,\,0\le z\le\pi\}$$

なので、

$$\begin{aligned}\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\frac{\partial}{\partial y}(y-x)+\frac{\partial}{\partial z}\cos z\right)dxdydz &= \int_0^{\pi}(2-\sin z)\,dz\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dydx\\ &= 2(\pi-1)\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで、$x=\sin\theta$ とすれば

$$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta\,,\ dx=\cos\theta\,d\theta\,,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

よって

$$
\begin{aligned}
2(\pi-1)\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx &= 2(\pi-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 2(\pi-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta+1)d\theta \qquad (\text{倍角の公式}) \\
&= 2(\pi-1)\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi(\pi-1).
\end{aligned}
$$

次に 2 重積分を求める。円柱なので次のように S を 3 つの面に分けて考える。

$$
S = S_1 + S_2 + S_3
$$

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\,,\, z=\pi\} \;\; (\text{上底面}), \\
&S_2 = \{x^2+y^2 \leq 1\,,\, z=0\} \;\; (\text{下底面}), \\
&S_3 = \{x^2+y^2 = 1\,,\, 0 \leq z \leq \pi\} \;\; (\text{側面})
\end{aligned}
$$

S_1 のとき、そのパラメーター表示は、

$$
\overrightarrow{r}(a,\theta) = (a\cos\theta\,,\, a\sin\theta\,,\, \pi) \;\; (0 \leq a \leq 1\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi)
$$

よって

$$
\overrightarrow{r}_a = (\cos\theta\,,\, \sin\theta\,,\, 0)\,,\; \overrightarrow{r}_\theta = (-a\sin\theta\,,\, a\cos\theta\,,\, 0)\,,\; \overrightarrow{r}_a \times \overrightarrow{r}_\theta = (0\,,\, 0\,,\, a)
$$

求める積分は、

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \overrightarrow{G}\cdot(\overrightarrow{r}_a \times \overrightarrow{r}_\theta)\,da d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (a\cos\theta + a\sin\theta\,,\, a\sin\theta - a\cos\theta\,,\, -1)\cdot(0\,,\, 0\,,\, a)\,da d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-a)\,da \\
&= -\pi.
\end{aligned}
$$

S_2 も同様に、

$$
\overrightarrow{r}(a,\theta) = (a\cos\theta\,,\, a\sin\theta\,,\, 0) \;\; (0 \leq a \leq 1\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi),
$$

$$
\overrightarrow{r}_a = (\cos\theta\,,\, \sin\theta\,,\, 0)\,,\; \overrightarrow{r}_\theta = (-a\sin\theta\,,\, a\cos\theta\,,\, 0)\,,\; \overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_a = (0\,,\, 0\,,\, -a)
$$

(このとき $\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_a$ の向きは $-a \leq 0$ となっていることに注意する。)
よってその積分は、

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{G} \cdot (\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_a)\, da d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a\cos\theta + a\sin\theta\,,\, a\sin\theta - a\cos\theta\,,\, 1) \cdot (0\,,\, 0\,,\, -a)\, da d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-a)\, da$$
$$= -\pi.$$

S_3 も同じく、

$$\overrightarrow{r}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\,,\, \sin\theta\,,\, \varphi) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\, 0 \leq \varphi \leq \pi),$$
$$\overrightarrow{r}_\theta = (-\sin\theta\,,\, \cos\theta\,,\, 0)\,,\ \overrightarrow{r}_\varphi = (0\,,\, 0\,,\, 1)\,,\ \overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_\varphi = (\cos\theta\,,\, \sin\theta\,,\, 0)$$

よってその積分は、

$$\iint_{S_3} \overrightarrow{G} \cdot (\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_\varphi)\, d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta\,,\, \sin\theta - \cos\theta\,,\, \cos\varphi) \cdot (\cos\theta\,,\, \sin\theta\,,\, 0)\, d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi^2.$$

よって、S における積分は、

$$-\pi - \pi + 2\pi^2 = 2\pi(\pi - 1).$$

以上より、発散定理が成り立つことが分かる。