ベクトルの外積と行列式

3 次元空間内の表裏が指定された平面図形 D に対して、その**面積ベクトル** (area vector) を

$$\mathbf{D} = |D|\mathbf{n}.$$

で定める。ここで、$|D|$ は、D の面積を、$\mathbf{n}$ は平面の向きを与える（裏から表に向かう）単位法線ベクトルを表わす。

空間のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して、この二つのベクトルの定める平面の向き $\mathbf{n}$ を、右ねじの規則で定める。さらに、この二つのベクトルの張る平行四辺形を考え、その面積ベクトルを $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と書いて（読み方は「a クロス b」)、ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ の**外積** (outer product) という。

定義から、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の成す角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき、

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta.$$

問 1. 外積は、結合法則を満たさない。これを確認。

定理 0.1. ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の成分表示を (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) とするとき、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

系 0.2. 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ それぞれについて線型であり、その成分表示は、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

問 2.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

問 3. 原点 O と 3 点 $A(1,1,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(3,1,1)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

定理 0.3 (多面体面積ベクトル)**.** 多面体で、各面の向きを多面体の内側から外側に向かう向きで定める。このとき多面体を構成する面の面積ベクトルの総和は零ベクトルである。

例 0.4. 向きのついた平面図形 D の面積ベクトル $\overrightarrow{D}$ の $\mathbf{e}$ 成分は、$\mathbf{e}$ と直交する平面への D の射影 $D_\perp$ の定める面積ベクトル $\overrightarrow{D_\perp}$ に等しい。

問 4. 3点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ の定める三角形 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

重積分の変数変換

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

例 0.5. よく使われる極座標変換 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の場合であれば、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

注意事項として、上記変数変換公式は、「重複のない」変数変換に限って適用できる点である。(1変数の場合は、「重複」があっても、その「向き」が反対になって打ち消し合うので、重複の有無を気にせずに使える。)

例 0.6. 円環 $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$ $(0<a<b)$ の面積を、重複のある変数変換 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(a \le r \le b, 0 \le \theta \le 4\pi)$ を機械的に適用して計算すると、

$$\int_a^b \int_0^{4\pi} r d\theta dr = 2\pi(b^2-a^2)$$

となり、正しい値 $\pi(b^2-a^2)$ の2倍になってしまう。

常に重複がないかどうか、あっても無視できるかどうかに注意しながら「分割して統治」することになる。

最後に、変数変換の合成に関するヤコビ行列式の乗法性を復習しておく(面積分のところで必要になる)。

命題 0.7. 変数変換 $(x,y) = (x(u,v),y(u,v))$ に変数変換 $(u,v) = (u(s,t),v(s,t))$ を代入して得られる合成変換 $(s,t) \mapsto (x,y)$ に対して、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$$

が成り立つ。(右辺第一因数の (u,v) には、$u(s,t)$, $v(s,t)$ を代入して s、t の関数にしておく。)