ベクトル場と流線

ベクトル場の記法：

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z), \qquad F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)).$$

命題 0.1. 勾配ベクトル場 $F(x,y)$ は、$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ を満たす。。

問 1. ベクトル場 $F(x,y) = (x - y^2, -2xy + 2y^3)$ について、上の判別条件を確かめ、$F = \nabla f$ となる関数 f を求めよ。

ベクトル場を図示する: (i) 定ベクトル場 (constant vector field) $F(x,y) = (u,v)$, (ii) 放射状の流れ $F(x,y) = (x,y)$, (iii) 回転流 $F(x,y) = (-y,x)$.

問 2. 次のベクトル場を図示せよ。(i) $F(x,y) = (x,0)$, (ii) $F(x,y) = (x,-y)$.

曲線 $(x(t), y(t))$ がベクトル場の**流線** (flow line) であるとは、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t)) \\ F_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

を満たすこと。

まず、$F(a,b) \neq 0$ となる点 (a,b) の付近では、流線は「平行な直線群」で近似される (狭い範囲に限定すると一定の風が吹いている)。

次に、$F(a,b) = (0,0)$ となる点（**特異点**）の付近では、一次近似式

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b), \quad F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b), \quad F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b), \quad F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b)$$

を考える。これをベクトル場の**線型化** (linearization) という。

問 3. ベクトル場 $F(x,y) = (x^2 + y, x + y + 2)$ の特異点および特異点における線型化を求めよ。

問 4. ベクトル場 $F(x,y) = (\sin(x+y), \sin(x-y))$ の点 $(\pi/2, \pi/2)$ における様子を調べよ。

定理 0.2. 特異点における線型化の行列が正則である（逆行列をもつ）場合には、特異点の付近でのベクトル場の様子は、線型化行列の共役類により決定される。