一次近似式

$$\Delta f(a,b,c) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z,$$
$$\Delta f(a,b,c) \equiv f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) - f(a,b,c).$$

鎖則 (chain rule)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

問 1. 直方体の２辺がそれぞれ２％増加し、残りの１辺が１％減少したならば、体積は何％増加するか。

勾配ベクトル (gradient)

$$\nabla f(a,b,c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

は、**関数 f の (a,b,c) における最大変化率の方向を表わし、その大きさは最大変化率に等しい**。

問 2. r^n の勾配ベクトルを求めよ。$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

等位面 $f(x,y,z) = h$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は、

$$f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0,$$

法線の方程式（パラメータ表示）は、

$$(x,y,z) = (a,b,c) + t\nabla f(a,b,c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

問 3. 楕円面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めよ。

問 4. 関数 $f(x,y,z) = x\cos(xy+z)$ の勾配ベクトルおよび曲面 $f(x,y,z)=0$ の点 $(1,\pi/3,\pi/6)$ における接平面の方程式を求めよ。