VA4(2009/7/24)

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 半球面 $x^2+y^2+z^2=2$ $(z \geq 0)$ に原点から外向きに向かう向きを与えたものを S とする。

(i) 曲面 S のパラメータ表示を与えよ。

(ii) ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x,y,az)$ の曲面 S に関する面積分の値が 0 となるように定数 a を定めよ。

(i) 上半球に対して

$$\overrightarrow{r}(\theta,\phi)=\sqrt{2}(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\quad 0\leq\theta\leq\pi/2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi \tag{1}$$

というパラメータ表示を考えると、

$$\overrightarrow{r}_\theta=\sqrt{2}(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta),\quad \overrightarrow{r}_\phi=\sqrt{2}(-\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,0),$$

であり、法線ベクトル

$$\overrightarrow{r}_\theta\times\overrightarrow{r}_\phi=\sqrt{2}\sin\theta\overrightarrow{r}$$

は、正しい向きを与えるので（$\sin\theta\geq 0$ に注意)、(1) が求めるパラメータ表示（の一つ）である。

(ii)

$$\begin{aligned}\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\overrightarrow{F}\cdot(\overrightarrow{r}_\theta\times\overrightarrow{r}_\phi)\,d\theta\phi \\ &= \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi/2}2\sin\theta(1+(a-1)\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= 4\pi\left[-\cos\theta-\frac{a-1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi}{3}(2+a)\end{aligned}$$

であるから、$a=-2$ である。

$\boxed{2}$ 原点以外の点で定義されたベクトル場 $\overrightarrow{G}(x,y,z)=(x/r^3,y/r^3,z/r^3)$ について考える。ここで、$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

(i) ベクトル場 $\overrightarrow{G}$ の発散を求めよ。

(ii) 立体 V の表面（境界）を ∂V で表す。∂V が原点を含まないとき、

$$\int_{\partial V} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S}$$

の値を求めよ。（ヒント：原点が V の外部にあるか、内部にあるかで場合分けせよ。）

(i) まず

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

に注意して計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}$$

となるので、x を y, z に置き換えた式を加えると

$$\mathrm{div}\overrightarrow{G} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0.$$

(ii) まず、原点が V の外部にあるとすると、発散定理と (i) により

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{G}\, dxdydz = 0.$$

原点 O が V の内部にあるときは、十分小さい $a > 0$ に対して、$V_a = \{\overrightarrow{r} \in V; |\overrightarrow{r}| \geq a\}$ とおくと、$O \notin V_a$ であるから、上の結果より

$$0 = \iint_{\partial V_a} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{\partial V} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} - \iint_{S_a} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S}$$

となる。ここで、S_a は原点を中心とする半径 a の球面に外向きに向きを入れたものを表す。

球面座標を使えば、S_a は、$\overrightarrow{r}(\theta, \phi) = (a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ のようにパラメータ表示されるので、$\overrightarrow{G} \cdot (\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_\phi) = \sin\theta$ に注意すれば、

$$\iint_{S_a} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi.$$

以上により、原点が V の内部にあれば、

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{S} = 4\pi.$$