VA3(2009/6/26)

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$

(i) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=9$ 上の点 $(2,-1,1)$ を通る接平面 H の方程式を求めよ。

(ii) (i) で求めた平面 H と 3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ とで囲まれた 4 面体の体積を求めよ。

(i) $\nabla(x^2+2y^2+3z^2)=(2x,4y,6z)$ であるから、H の方程式は、$(x-2,y+1,z-1)\perp(4,-4,6)$ より、$2x-2y+3z=9$.

(ii) H と x 軸、y 軸、z 軸との交点は $(9/2,0,0)$, $(0,-9/2,0)$, $(0,0,3)$ であるから、求める体積は $\frac{1}{6}(9/2)^2 3=9^2/2^3$.

$\boxed{2}$ 不定積分の公式

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

を使って、曲面 $\overrightarrow{r}=(e^{-s}\cos t,e^{-s}\sin t,s)$ $(s\geq 0,\ 0\leq t\leq 1)$ の表面積を求めよ。

これは $y=e^{-z}$ $(z\geq 0)$ のグラフを z 軸の回りに 1 回転させた回転体の表面積である。

$$r_s=(-e^{-s}\cos t,-e^{-s}\sin t,1),\quad r_t=(-e^{-s}\sin t,e^{-s}\cos t,0),$$

$$r_s\times r_t=(-e^{-s}\cos t,-e^{-s}\sin t,-e^{-2s})$$
$$|r_s\times r_t|=\sqrt{e^{-2s}+e^{-4s}}=e^{-s}\sqrt{e^{-2s}+1}$$

であるから、求める表面積は

$$\begin{aligned}\iint_{s\geq 0,0\leq t\leq 1}e^{-s}\sqrt{e^{-2s}+1}\,dsdt&=\int_0^\infty e^{-s}\sqrt{e^{-2s}+1}\,ds\\&=\int_0^1\sqrt{u^2+1}\,du\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$