$\boxed{1}$

(i) 勾配ベクトル場 $F = \nabla f$ の曲線 C にそった線積分においては、

$$\int_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_f) - f(\boldsymbol{r}_i)$$

という関係が成り立つ。ここで、$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_i$ は C の始点と終点をそれぞれ表す。逆にこのような性質をもつベクトル場は、勾配ベクトルに限る。

(ii) ベクトル場

$$(P, Q) = \frac{1}{x^2 + y^2}(y, -x), \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

が勾配ベクトル場であるかどうか調べてみよう。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}(2y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

であるから､必要条件は満たしている。ところが､円周 C: $(\cos t, \sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に関する線積分を計算すると

$$\oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) - \cos t \sin t)\, dt = -2\pi$$

となって 0 にならないので、勾配ベクトル場ではない。

$\boxed{2}$ ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ （θ は実数の定数）と領域 $D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ に対して、グリーンの定理が成り立つことを具体的に確かめよ。

これは、概ねできていたことでもあり、解答は略す。テキストで似たような計算が詳しく書かれていることでもあり。