$\boxed{1}$

(i) 曲線 $\mathbf{r}(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}, 2t)$ $(-1 \leq t \leq 1)$ の $t = 0$ における接線と平面 $x + y + z = 0$ との交点を求めよ。

(ii) (i) の曲線の長さを求めよ。

(i) 速度ベクトルは、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2)$$

であるから、$t = 0$ での接線のパラメータ表示は、

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + t(0, 2, 2) = (2, 2t, 2t).$$

これを $x + y + z = 0$ に代入すると、$t = -1/2$ となるので、求める交点は、$(2, -1, -1)$.

(ii) まず、

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^2 = (e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2 + 2^2 = 2(e^t + e^{-t})^2$$

であるから、曲線の長さは、

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2}(e^t + e^{-t})\, dt = \sqrt{2}[e^t - e^{-t}]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}(e - e^{-1}).$$

$\boxed{2}$

(i) ベクトル場 $F(x, y) = (y, -x)$ の様子および流線を図示せよ。

(ii) ベクトル場 $G(x, y) = (x - x^3 + xy, y)$ の特異点および特異点における線型化を求めよ。

(i) ベクトル $(y, -x)$ は、ベクトル (x, y) を $-\pi/2$ だけ回転したものであることに注意して図を描く。流線は、原点（＝特異点）を中心とした同心円になる。

(ii) 特異点は、$G(x, y) = (0, 0)$ を解いて、$(x, y) = (0, 0), (-1, 0), (1, 0)$ の３点。

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - x^3 + xy) = 1 - 3x^2 + y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x - x^3 + xy) = x,$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

に注意すれば、それぞれの点での線型化は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}.$$