7　連続関数の怪

極限操作の正確な表現。数列の極限。防衛ラインと敵の侵略ゲーム。

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon.$$

Remark . コーシー列の正確な定義は、

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |a_m - a_n| \leq \epsilon.$$

問 11. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するということは、

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq 2\epsilon.$$

と書いてもよい。あるいは最後の 2ϵ の 2 を任意の (ϵ などとは無関係な）正数で置き換えても同じ内容（命題として同じ主張）である。これを確かめよ。

例題 7.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Proof. どんなに小さく $\epsilon > 0$ を選んだとしても、自然数 N を大きくとれば、

$$\forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon$$

となる。このとき、$n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \frac{1}{n}\left(|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|\right) \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \epsilon\end{aligned}$$

となる。そこで、自然数 $N' \geq N$ をさらに大きくとって、

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{N'} \leq \epsilon$$

となるようにしておけば、$n \geq N'$ に対しては

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leq 2\epsilon$$

となる。 □

問 12. 数列 $\{a_n \geq 0\}$ が $a \geq 0$ に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$$

である。

命題 7.2. 次は同値。

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

(ii) $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

Proof. (i) ⇒ (ii): (ii) を否定すると、

$$\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, |x-a| \leq \delta, |f(x) - f(a)| > \epsilon.$$

そこで、$\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ と選ぶと、$\exists x = a_n$,

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(a_n) - f(a)| > \epsilon.$$

これは

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$$

ということだから、(i) が成り立たない。

(ii) ⇒ (i): $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を仮定すると、

$$\forall\delta > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq \delta$$

となる。そこで、$\forall\epsilon > 0$, (ii) で存在が保証されている $\delta > 0$ をとり、この δ に対して、上の条件をみたす N を選んでおけば、$\forall n \geq N$,

$$|a_n - a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - f(a)| \leq \epsilon$$

となって、これは $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ を意味する。 □

定義 7.3. 上の同値な条件をみたすとき、関数 f は $x = a$ で**連続である** (continuous) という。定義域に属するすべての a で連続であるとき、f は連続であるという。

Cantor 集合と Cantor 関数

区間 $[0,1]$ 内の実数を三進展開して

$$[0.c_1c_2\ldots]_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{3^j}$$

と表す。ここで数列 $\{c_j\}_{j\geq 1}$ は、$c_j \in \{0,1,2\}$。第一のステップで、$[0,1]$ から、開区間 $([0.1]_3, [0.2]_3)$（これは、$[0,1]$ を三等分した中央の部分）を除く。次に残った 2 つの区間をそれぞれ三等分しやはり中央部分の開区間

$$([0.01]_3, [0.02]_3), \qquad ([0.21]_3, [0.22]_3)$$

を除く。以下、これを繰り返し、n ステップ目では、幅 3^{-n} の 2^{n-1} 個の開区間を取り除くと、結局残るのは、

$$[0.c_1c_2\ldots]_3, \qquad c_j \in \{0,2\}$$

の形の実数全体 C となる。この残った部分を Cantor 集合とよぶ。これの「個数」は、$2^{\mathbb{N}}$ だけあるので、実数の「個数」と等しい。一方、取り除く区間の長さの総和は、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = 1$$

となって、Cantor 集合の「長さ」は零であることがわかる。

三進展開を利用して、この Cantor 集合の上だけで「増加」する閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 (Cantor 関数) を作ってみよう。三進実数 $c = [0.c_1c_2\ldots]_3$ に対して、二進実数 $f(c)$ を次のように定める。$c \notin C$ のときには、$n \geq 0$ を $c_j \neq 1$ for $1 \leq n$ and $c_{n+1} = 1$ として、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\ldots\frac{c_n}{2}1\right]_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

とおく。$c \in C$ のときには、$c_j \neq 1$ for $j \geq 1$ であるから、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\ldots\right]_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{2^{j+1}}$$

とおく。そうすると、(i) f は単調増加連続関数で、(ii) $[0,1] \setminus C$ の上では微分可能で、$f'(x) = 0$ である。

かくの如く連続関数とは「恐ろしい」ものである。と同時に、具合のいいものでもある。

定理 7.4. 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数に対しては、最大値・最小値がともに存在する。

Proof. Bolzano の定理による。 □

定理 7.5 (Mean Value Theorem). 有界閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 f の最大値・最小値をそれぞれ M, m であらわすとき、

$$\{f(t); t \in [a,b]\} = [m,M]$$

が成り立つ。

Proof. 最大値・最小値を与える点の座標を改めて、a, b と取り直して、$(M,m) = (f(a), f(b)$ または $(M,m) = (f(b), f(a))$ と仮定してよい。一般に、2 つの実数 α, β に対して $[\alpha,\beta]$ または $[\beta,\alpha]$ に含まれる実数を α, β の中間点と呼ぶことにする。さて、勝手に選んだ $\mu \in [m,M]$ に対して、区間 $[a,b]$ を二等分して、$[a,c]$, $[c,b]$ を考えると、μ は、$(f(a), f(c))$ または、$(g(c), f(b))$ の中間点である。そこで、中間点になっている方の区間を $[s_1, t_1]$ と名付け、さらに $[s_1, t_1]$ を二等分して、この議論を続けると、実数列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ で、

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots < \cdots \leq t_2 \leq t_1, \qquad t_n - s_n = \frac{t_1 - s_1}{2^{n-1}}$$

であり、μ が $f(s_n)$, $f(t_n)$ の中間点となっているものが存在する。区間縮小法の原理により、

$$s_\infty = \lim_n s_n, t_\infty = \lim_n t_n$$

が存在して一致する。一方、μ が $f(s_n)$, $f(t_n)$ の中間点であることから、

$$|f(t_n) - \mu| \leq |f(t_n) - f(s_n)| \leq |f(t_n) - f(t_\infty)| + |f(s_\infty) - f(s_n)|$$

となって、極限を取って、f の連続性を使えば、

$$\mu = f(t_\infty)$$

であることがわかる。 □

命題 7.6. 有界閉区間 $[a,b]$ で連続で、その内部 (a,b) で微分可能な関数 $f(t)$ が、$|f'(t)| \leq M$, $a < t < b$ ($M > 0$ は定数) をみたすならば、

$$|f(s) - f(t)| \leq M|s - t|, \qquad s, t \in [a,b].$$

Proof. 背理法で証明する。仮に、上の不等式が成り立たないとすると、$a < s_1 < t_1 < b$ と $M' > M$ で、

$$|f(s_1) - f(t_1)| \geq M'|s_1 - t_1|$$

となるものが存在する。s_1 と t_1 の中点 $u = (s_1 + t_1)/2$ を考える。ここでもし、

$$|f(s_1) - f(u)| < M'|s_1 - u|, \quad |f(u) - f(t_1)| < M'|u - t_1|$$

であれば、

$$|f(s_1) - f(t_1)| < M'|s_1 - t_1|$$

が成り立つので、どちらかの不等式は成り立たない。成り立たない方の点の組み合わせを $s_2 < t_2$ と名付けると、

$$s_1 \leq s_2 < t_2 \leq t_1, \qquad t_2 - s_2 = \frac{t_1 - s_1}{2}$$

であり、

$$|f(s_2) - f(t_2)| \geq M'|s_2 - t_2|$$

となる。以下、この作業を続けると、実数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ で、

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots < \cdots \leq t_2 \leq t_1, \quad t_n - s_n = \frac{t_1 - s_1}{2^{n-1}}$$

をみたし、

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geq M'|s_n - t_n|$$

となるものの存在がわかる。

区間縮小法の原理により、実数 c を

$$c = \lim_n s_n = \lim -n t_n$$

で定め、各 n に、$s_n \leq c \leq t_n$ に上の議論を適用して、$c_n = s_n$ または $c_n = t_n$ を

$$|f(c_n) - f(c)| \geq M'|c_n - c|$$

が成り立つように選んでいけば、

$$\left| \lim_{n \to \infty} \frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} \right| \geq M' > M$$

となって、$|f'(c)| \leq M$ と矛盾する。 □

系 7.7. 開区間 (a,b) の上で定義された関数 f が微分可能で、$f'(t)=0$, $a<t<b$ であるならば、f は定数関数である。

例題 7.8. 正の数 δ に依存して決まる実数 $M(\delta)$ に対して、

$$\lim_{\delta\to 0} M(\delta)=0$$

という主張の否定（命題）は、

$$\exists\epsilon>0, \forall\delta>0, |M(\delta)|\geq\epsilon.$$

補題 7.9 (一様連続性, uniform continuity). 連続関数に対して、

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x)-f(y)|; |x-y|\leq\delta\}=0.$$

Proof. 仮に上の補題が成り立たないとすると、

$$\exists\epsilon>0, \forall\delta>0, \exists x(\delta), y(\delta), |x-y|\leq\delta, |f(x)-f(y)|\geq\epsilon.$$

δ として $1/n$ を取ってきたときの $x(\delta)$, $y(\delta)$ を x_n, y_n で表せば、

$$|x_n-y_n|\leq\frac{1}{n}, \quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon, \qquad n=1,2,\ldots$$

である。Bolzano の定理により、$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ で収束するものを取ってきて、$c=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}$ とすると、

$$|f(x_{n_j})-f(y_{n_j})|\leq|f(x_{n_j})-c|+|f(y_{n_j})-c|\to 0 \qquad (j\to\infty)$$

となって矛盾である。 □

定理 7.10. 閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 f に対して、その積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

が存在する。

命題 7.11. 関数 $f(t)$ が $t=c$ で最大値（または最小値）をとり、かつ $t=c$ で微分可能であれば、$f'(c)=0$.

問 13. 上の補題を利用して、いわゆる「平均値の定理」を導く。

問 14. 各点連続性と一様連続性を論理記号を使って表せば次のようになる。

$$\forall\epsilon>0,\forall x,\exists\delta>0,\forall y,|x-y|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\epsilon,$$
$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,\forall y,|x-y|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\epsilon.$$

問 15. 積分の（基本）不等式を使って、連続関数 f に対して、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),\qquad a<x<b$$

を示せ。

Remark . 上の問と系 7.6 から、$f'(t)$ が連続関数であれば

$$\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$$

という見なれた公式に帰着するが、単に $f'(t)$ があるというだけでは、そもそもこの積分の存在すら覚束ない。

それにも関らず、$M=\sup\{|f'(t)|;a<t<b\}$ とすると、

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|,\qquad x,y\in(a,b)$$

が成り立つ。（無限部屋割り論法。）