6　定積分の存在

最初に、ギリシャ文字についての講釈。

閉区間 $[a,b]$ の上で定義された関数 $f(x)$ の定積分の定義について。区間の分割 Δ と分割の細かさ $|\Delta|$。分割の代表点 $\xi = \{\xi_j\}_{1\leq j\leq n}$ とリーマン和

$$S(\Delta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

$|\Delta| \to 0$ でありさえすれば、分割の仕方および代表点 ξ の選び方に無関係に、リーマン和 $S(\Delta,\xi)$ が一定の値に近づくとき、その近づく先の値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書いて、関数 f の区間 $[a,b]$ における**定積分** (definite integral) と呼ぶ。

関数 f が連続であるとき、Cauchy は次のように考えて、その定積分が「存在する」と結論した。分割の列 $\{\Delta_k\}_{k\geq 1}$ を、各 Δ_k が Δ_{k-1} の細分割でしかも $|\Delta_k| \to 0$ $(k\to\infty)$ あるようにとるとき、数列 $\{S_k = S(\Delta_k, \xi^{(k)})\}$ がコーシー列であればよい。そのためには、和 S_l の項ををより粗い分割 Δ_k $(k<l)$ でくくり直せば、

$$f(\xi)(y-x), \qquad \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

の比較が問題である。

これを調べるために、$\delta > 0$ に対して、

$$M(\delta) = \sup\{|f(s)-f(t)|; |s-t| \leq \delta\}$$

なる量を導入する。これを使えば、

$$\begin{aligned}
\left| f(\xi)(y-x) - \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| &= \left| \sum_j (f(\xi) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&\leq \sum_j |f(\xi) - f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq M(\delta) \sum_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= M(\delta)(y-x),
\end{aligned}$$

ただし $\delta = |\Delta_k|$, となるので、さらに和をとって、

$$\left|S(\Delta_k, \xi^{(k)}) - S(\Delta_l, \xi^{(l)})\right| \le M(|\Delta_k|)(b-a), \quad k \le l$$

を得る。

問 10. 二つの分割 Δ', Δ'' と代表点の列 ξ', ξ'' に対して、$\delta = \max(|\Delta'|, |\Delta''|)$ とおくと、

$$|S(\Delta', \xi') - S(\Delta'', \xi'')| \le 2M(\delta)(b-a)$$

である。これを示せ。

命題 6.1. 関数 f が、$M(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ という性質をみたせば、すなわち

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x) - f(y)|; |x-y| \le \delta\} = 0$$

であれば、定積分

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

が存在する。

ここで、この条件が関数 f の連続性、

$$y \to x \quad \Rightarrow \quad f(y) \to f(x)$$

から即座に導かれるわけではないことに注意しよう。
この二つの条件は、言葉で曖昧に表現すれば、

x と y が近ければ、$f(x)$ と $f(y)$ も近い

となるので、うっかりしそうな所ではあるが、後ほど見るように論理記号を使って正確に表現すれば、積分の存在を保証する連続性（一様連続性という）の方が、単なる（各点での）連続性よりも強い条件であることがわかる。
しかしながら、関数の定義域が有限閉区間であるときには、この弱い方の連続性から、強い連続性を導くことが可能である。
この辺の事情を以下で詳しくみていこう。