5　実数の連続性

　実数からなる集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して、実数 a が A の**上界**（じょうかい、upper bound）であるとは、

$$A \subset (-\infty, a]$$

であること。また、**下界**（「かかい」と読むらしい、lower bound）であるとは、

$$A \subset [a, +\infty)$$

となること。上界、下界ともに存在するとき、集合 A は**有界** (bounded) であるという。

　自然数の集合は下界を持つが、上界は存在しない。整数の集合は、上界も下界ももたない。有限区間 $[a, b]$ などは、有界。

　実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は、その像 $\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\}$ が有界のとき、**有界関数**であるという。関数 f が有界であることを形式的に表現すれば、

$$\exists M > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq M$$

となる。

　実数には**連続性** (continuity) と称される重要な性質がある。この連続性にはいくつかの同値な言い換えがあるが、ここでは次の性質を採用する。

　区間縮小法の原理（空でない）閉区間の減少列 $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$ で、区間の幅 $|I_n|$ が 0 に近づくものの共通集合は、一つの実数からなる。$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n$ とおけば、

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

である。

命題 5.1. 上に（下に）有界な集合 A は最小の上界（下界）をもつ。さらに最小上界は、A から選んだ数列の極限として表される。

Proof. A の要素 a_1 および A の上界のひとつ b_1 を勝手に選びその中点 $(a_1 + b_1)/2$ を c_1 とする。区間 $[c_1, b_1]$ に含まれる A の点が存在するときは、そのような点をひとつ取ってきて a_2 と名づけ $b_2 = b_1$ とおく。もし、区間 $[c_1, b_1]$ と A が共通部分を持たないときは、c_1 が A の上界になるの

で、$a_2 = a_1, b_2 = c_1$ とおく。以下、この操作を繰り返すと、A の要素の単調増大列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ と A の上界からなる単調減小列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を取りだすことができ、さらに、作り方から、$|b_n - a_n| \leq |b_{n-1} - a_{n-1}|/2$ であるので、区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ は区間縮小法の条件をみたす。したがって、実数 c を

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

によって定めることができる。

まず、c は A の上界である。というのは、$a \in A$ に対して、b_n は A の上界であることから、$a \leq b_n$ が任意の n について成り立ち、したがってその極限として $a \leq c$ が成り立つ。

次に、c は A の上界の中で最小のものであること。A の上界 b を勝手に取るとき、$a_n \leq b$ がすべての n に対して成り立つので、やはり極限を取って、$c \leq b$ となるからである。 □

上の証明方法を、**無限部屋割り論法**と呼ぶことにする。さらに、この証明方法をなぞれば、次のこともわかる。

系 5.2. 単調増加（あるいは単調減少）数列は、発散しなければ収束する。

Remark . 本来の部屋割り論法は次のようなものである。$n+1$ 個の互いに異なる自然数があれば、その中から 2 つ選んでその差が n で割り切れるようにできる。

上に有界な実数の集合 A に対して、その最小の上界を A の**上限** (supremum) とよんで、$\sup A$ と書く。上界をもたない（実数の）集合 A に対しては、$\sup A = +\infty$ といった書き方をする。

同様に、下に有界な実数の集合 A に対して、その最大の下界を**下限** (infimum) とよんで、記号 $\inf A$ で表す。(superior, inferior, inferno, infinite)

例題 5.3.

(i) 集合 $A = \{1/n; n = 1, 2, \dots\}$ に対して、

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = 0.$$

(ii) 開区間 $A = (a, b)$, $a < b$, に対して、

$$\sup A = b, \qquad \inf A = a.$$

問 9. 空集合 $\emptyset$ に対しては、$\sup\emptyset$, $\inf\emptyset$ をどう定義するのが合理的か。

実数列の**上極限** ($\limsup$)、 **下極限** ($\liminf$) の定義。

定理 5.4. 実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して次は同値。

(i) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は、収束する。

(ii) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ である。

(iii) $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$ である。

Proof. (iii) $\Rightarrow$ (ii): $b_n = \inf\{a_k; k \geq n\}$, $c_n = \sup\{a_k; k \geq n\}$ とおくと、b_N, c_N は、数列 $\{a_N, a_{N+1}, \dots\}$ の部分列の極限だから、

$$0 \leq c_N - b_N \leq \sup\{|a_m - a_n|; m, n \geq N\} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): 仮定により、$\lim b_n = \lim_n c_n$ であるから、

$$\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subset [b_n, c_n]$$

の右辺に区間縮小法を適用すると、数列 $\{a_n\}$ はひとつの実数に近づくことがわかる。

(i) $\Rightarrow$ (iii): $\lim_n a_n = a$ とすると、

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty.$$

□

上の定理の (iii) の条件をみたす実数列を**コーシー列** (Cauchy sequence) とよぶ。収束先を使わずに、数列の収束性を判定できるので、理論的に重要である。フランスの数学者 A. L. Cauchy に因む。

定理 5.5 (Bolzano). 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ から収束する部分列を取り出すことができる。

Proof. これも無限部屋割論法により、Cauchy 列を取り出す。 □