4　無限の数え方

（無限）集合の「個数」を比較するために、

補題 4.1. 2つの集合 A, B に対して、次の条件は同値。

(i) A から B への単射が存在する。

(ii) B から A への全射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、$|A| \leq |B|$ または $|B| \geq |A|$ と書くことにする。

定理 4.2 (Bernstein). 次の条件は同値である。

(i) $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ である。

(ii) 集合 A から集合 B への全単射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、2つの集合 A, B は同じ**基数** (cardinal number) を持つといい、$|A| = |B|$ あるいは $A \sim B$ と書く。「基数」のかわりに**濃度**という言い方をすることも多い。有限集合については、基数が等しいことと集合の要素の個数が等しいこととは、同値であるので、「基数」は「個数」の概念を拡張したものになっている。以下では、用語の直感的なわかり易さを優先させて「個数」という言い方も用いることにする。

Proof. 系図を考える。 □

問 8. Bernstein の定理の証明について調べ、納得する。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同じ「個数」をもつ集合を**可算集合** (countable set) という。可算集合の「個数」を $\aleph_0$ (アレフゼロと読む)、実数の集合 $\mathbb{R}$ の「個数」を $\aleph$ (アレフと読む、ヘブライ語のアルファであるらしい) で表す。

例題 4.3. 自然数全体と偶数全体あるいは奇数全体は同じ「個数」をもつ。$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ は可算集合である。代数的数全体も可算集合。

命題 4.4. 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ で、I が可算集合であり各 $i \in I$ に対して A_i も可算集合であれば、

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

も可算集合。

例題 4.5. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2$ は可算集合である。代数的数全体も可算集合。

命題 4.6. 無限集合 A に対して、$A \sqcup \mathbb{N}$ は A と同じ「個数」をもつ。

Proof. A は無限集合であるから、単射 $f : \mathbb{N} \to A$ が存在する。このとき、$f(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ と対等であり、

$$A \sqcup \mathbb{N} = (A \setminus f(\mathbb{N})) \sqcup f(\mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N} \sim (A \setminus f(\mathbb{N})) \sqcup f(\mathbb{N}) = A.$$

□

例題 4.7. 実数の集合 $\mathbb{R}$ と無理数の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は同じ「個数」をもつ。

集合 A に対して、A の全ての部分集合からなる集合（集合の集合！）を 2^A と書いて、A の**冪集合** (power set) と呼ぶ。

例題 4.8. A が有限集合のとき、2^A の個数は、$2^{|A|}$.

定理 4.9. 任意の集合 A に対して、冪集合 2^A の「個数」は A の「個数」よりも真に大きい。

Proof. 仮に A から 2^A への全射 f があったとすると、各 $a \in A$ に対して、$f(a)$ は A の部分集合を意味する。そこで、A の部分集合 B を

$$B = \{a \in A; a \notin f(a)\}$$

で定めると（B は空集合かもしれない）、全ての $a \in A$ に対して、$B \neq f(a)$ である。実際、$a \in f(a)$ とすると、$a \notin B$ であるから、$B = f(a)$ とはなり得ないし、また、$a \notin f(a)$ とすると、$a \in B$ であるから、この場合も $B \neq f(a)$。

以上により、A から 2^A のどんな写像も全射にはなり得ない。 □

系 4.10 (Cantor). 実数の集合は可算ではない。

実数の二進展開。$A = 2^{\mathbb{N}}$ から $[0, 1]$ への全射 f。有限個の項を除いて全て 0 か全て 1 となる数列からなる $2^{\mathbb{N}}$ の数列全体を A'、$A'' = A \setminus A'$ とおくと、A'' は無限集合であり（勝手な長さの周期をもった列を考える)、f は A'' の上で単射になる。一方、A' は可算集合であるから、この二つから、$2^{|\mathbb{N}|} = |A''| = |f(A'')| = |[0, 1]|$ がわかる。

例題 4.11. 超越数 (transcendental number) 全体は $\mathbb{R}$ と同じ「個数」。$\pi = 3.14159\ldots$, $e = 2.71828\ldots$ は具体的（？）な超越数。

命題 4.12. $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ は同じ「個数」をもつ。