3　写像のお作法

二つの集合 X, Y を用意する。X の各要素 x に対して Y の要素 $f(x)$ が定められているとき、この対応の規則を**写像** (map) という。$f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ といった書き方をする。X を f の**定義域** (domain)、Y を f の**値域** (range) という。別の写像 $f' : X' \to Y'$ に対して、$f = f'$ というのは、$X = X'$, $Y = Y'$ かつ $\forall x \in X, f(x) = f'(x)$ であることと定義する。写像 $f : X \to Y$ でとくに Y が数の集合であるとき、**関数** (function)、$X = \mathbb{N}$ のとき**列** (sequence) ということが多い。

- $f : X \to \mathbb{R}$, 実数値関数
- $f : X \to \mathbb{C}$, 複素数値関数。
- 定義域が $\mathbb{N}$ で値域が $\mathbb{R}$ である写像をふつう数列とよぶ。

合成写像 (composite map) と**結合法則** (associativity law) 。$X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ のときには合成関数という言い方もする。
恒等写像 (identity map)。
写像の**像** (image) と**逆像** (inverse image)。
写像の**制限** (restriction)。

命題 3.1.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(iv) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

単射 (injection)、**全射** (surjection)、**全単射＝双射** (bijection)。**逆写像** (inverse map)。１対１の写像、上への写像。

例題 3.2. 折り返し法による最短経路の数え方。

問 6. m 個の集合から n 個の集合への単射の個数は、

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

である。全射の個数 $S(m,n)$ は

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(m,k) = n^m$$

をみたし、これから

$$S(m,n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

問 7. 集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ から集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ への全単射 f で $f(j) \neq j$ となるものの個数は、

$$R_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

である。$R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $R_4 = 9$ など。

ヒント： $A_j = \{f \in S_n; f(j) \neq j\}$ とおいてふるいの公式を使う。はて、S_n って何だろう。