集合入門 2 (2005/6/7)

$\boxed{1}$

(i) 写像 $f : X \to Y$ が単射であるとは、X から取ってきた 2 つの異なる要素 $x \neq x'$ に対して常に $f(x) \neq f(x')$ が成り立つこと、を言う。

閉区間 $[0,1]$ から集合 $\{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ への単射は存在しない。理由は、もし単射 $f : [0,1] \to \{1, \ldots, 100\}$ が存在すれば、閉区間 $[0,1]$ は無限集合であることから、その像 $f([0,1])$ も無限集合になり、これが有限集合 $\{1, \ldots, 100\}$ の部分集合とはなり得ない。

(ii) 写像 $f : X \to Y$ が全射であるとは、Y に属する勝手な要素 y に対して $y = f(x)$ を満たす要素 $x \in X$ を見い出せること。

集合 $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ から閉区間 $[0,1]$ への全射は存在しない。仮に、全射 $f : \{1, \ldots, 10\} \to [0,1]$ が存在したとすると、

$$[0,1] = \{f(1), \ldots, f(10)\}$$

となり、閉区間 $[0,1]$ は無限集合であるから、これはあり得ない。

$\boxed{2}$ 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x(x^2 - 3)$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(i) f のグラフは、3 次関数のグラフであること、x 軸と $x = 0, \pm\sqrt{3}$ で交わること、$x = \pm 1$ の点で極値を取ることに注意して描く。

(ii) $f(1) = -2$, $f(-1) = 2 < 18 = f(3)$ に注意して、f による集合 $[-1, 3]$ の像 $f([-1,3])$ を求めると、

$$f([-1,3]) = [-2, 18].$$

(iii) $f(x) = 0$ となる x の値に注意して、f による集合 $[0, \infty)$ の逆像 $f^{-1}([0,\infty))$ を求めると、

$$f^{-1}([0,\infty)) = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty).$$