集合入門 1(2005/5/17)

$\boxed{1}$

(i) いかなる集合 A に対しても、$A \cup \{1,2\} \supset \{1,2\}$ であるから、$A \cup \{1,2\} = \{3,4,5\}$ となることはない。

(ii) すべての $[a,b]$ を含む集合とは、$\mathbb{R}$ を含む集合に他ならないから、$\mathbb{R} \subset B$ ということである。これが必ずしも等号を意味しないことは、$B = \mathbb{C}$ とでも置けばわかる。

(iii) $C \times D = \{(c,d); c \in C, d \in D\}$ において、$D = \emptyset$ とすると、$d \in D$ となる要素がないわけであるから、$C \times \emptyset$ に含まれる要素は存在しない。したがって、$C \times \emptyset = \emptyset$ である。この関係は、C が有限集合の場合の公式、$|C \times \emptyset| = |C||\emptyset| = 0$ とも符合する。

$\boxed{2}$

(i) 内側から計算する：

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, m] = \bigcap_{m=1}^{\infty} (0, m] = (0, 1]$$

である。(0 は入らないことに注意。$[0,m]$, $[0,1]$ などとする者多し。)

(ii) 積集合の定義から、

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$$

である。($\{x, 2x, 3x, y, 2y, 3y\}$ とする者極めて多し。$\{1, x\}$ とする者あり。) また、自然数に対する積の概念は、積集合の個数の公式 $|A \times B| = |A|\,|B|$ に由来するものと考えられる。

(iii) $1 \neq \{1\}$ であるから、$|X| = 2$ である。また、べき集合の定義から、

$$2^X = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\Big\}$$

である。(不用意に括弧を略す者多し。) この結果が分かりにくければ、一般的な関係

$$2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

に、$a = 1$, $b = \{1\}$ を代入してみよ。