2　集合のお作法

集合 (set) の**要素**（元）(element)。

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{2, 1, 3, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, n, 1\}.$$

集合をこのように要素を列挙して表す場合には、その順番および何度出てきたかは問題にせずに（気にしないで）同じ集合を表す（と約束する）。

$$[a, b] = \{x; x \text{ は } a \leq x \leq b \text{ となる実数}\}.$$

この表し方は、性質でもって集合を規定するもので、もっとも多く用いられる。区切り記号としては「;」以外にも「|」あるいは「:」がよく使われる。

数の集合

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
\mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合}, \\
\mathbb{Q} &= \text{有理数全体の集合}, \\
\mathbb{R} &= \text{実数全体の集合}, \\
\mathbb{C} &= \text{複素数全体の集合}.
\end{aligned}$$

自然数 (Natural number)、整数 (integer, Zahlen)、有理数 (rational number)、無理数 (irrational number)、実数 (Real number)、複素数 (Complex number)。

有理数の原語 rational $\Leftarrow$ ratio（比）、有比数。とすれば irrational number の「正しい訳語」は、無比数！

- **部分集合** (subset) の記号 $A \subset B$ には、等号 $A = B$ を許す。**空集合** (empty set), $\emptyset = \{\ \}$.
- **有限集合** (finite set) と**無限集合** (infinite set)。有限集合 A に対して、$|A| = A$ の要素の個数。
- **和** (union) と**共通部分** (intersection), $A \cup B$, $A \cap B$.

命題 2.1.

(i) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

全体集合 (universal set) と**補集合** (complement)、A' または A^c.

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
- $(A')' = A$, $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$.

差集合 (difference set),

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\} = \{x \notin B; x \in A\}.$$

集合の族 (a family of sets), $\{A_i\}_{i \in I}$, 添え字集合 (index set).

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a; \exists i \in I, a \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{a; \forall i \in I, a \in A_i\}.$$

命題 2.2.

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'.$$

積集合 (product set), $A \times B$, $A \times B \times C$ など。$A^n = A \times \cdots \times A$.

- $\mathbb{R}^2 =$ 平面、
- $\mathbb{Z}^2 =$ 二次元格子、
- $\mathbb{R}^3 =$ ３次元空間。

Remark . 二次元ベクトル、開区間、二次元座標はしばしば同じ記法で書き表される。意外に混乱しないものではあるが、「こだわる」人は、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad]a, b[, \qquad (a, b)$$

などと区別したりするが、気休め程度のもの。

例題 2.3 (Sieve Formula). 有限集合 A の部分集合の列 $\{A_j\}_{1 \le j \le n}$ と $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$A_I = \cap_{i \in I} A_i$ とおくとき、

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} |A_I|.$$

問 5. 上の「篩の公式」の証明を考える。

Remark . Cantor が創めた集合論は、素朴な数学的常識に基づくものであったが、その後、そのような「素朴な定義」では矛盾が生じることが明らかになった。その中でも有名な **Russel のパラドックス**というのは次のようなものである。

集合 x に対して、$x \in x$ という性質を素朴に考える。ここで、「素朴に考える」とは、集合 x に対して、いつでも $x \in x$ であるかそうでないかがはっきりしているはずだという立場である。常識的に考えると、$x \in x$ であるような集合はないので、すべての集合は $x \notin x$ であると、思われる。ところが、$y = \{x; x \notin x\}$ という集合を考えると、仮に $y \in y$ とすると、この性質から $y \notin y$ が導かれ矛盾である。一方、$y \notin y$ と仮定すると、y 自身は集合 y を規定している性質を満たすので、$y \in y$ となりやはり矛盾である。

これは、集合という言葉の意味を曖昧にしたまま「全ての集合」が再び集合であるとすると、矛盾が生じるということで、このあたりの吟味から現代的な集合論が始まった。（吉永 良正「ゲーデル・不完全性定理」（講談社、ブルーバックス）あたりから入ってみよう。）