# 集合と実数

山上　滋

平成 13 年 9 月 28 日

まあ、いい加減だねえ、ふつうは、このように論理の順序を「無視」した書き方はしないものなんだが、「数学」では。でもね、偉い数学者でもけっこうルーズで、最初からきっちり考えたりはしないのが本当だったりする。ブルバキを見よ。あれは、完成したと言えるのか。むしろ、「偉い人」というのは、「本質的なところ」で間違えない直観力を持っているものである。偉くもない中者以下が形式にこだわっていたりして。逆にいえば、普通の人は型通りに勉強すべしという教訓か。しかし、それだけでは、人生、虚しくはないか。みんな死ぬのですよ、間違いなく。細心は必要であっても、小心であっては困るのだな、とくにボスは。細かいことをいう人間に限って、自分がしたことしなかったことに対して責任を取らなかったりする。（実感がこもってるねえ。だれのこと？）

だから、「いいかげん」という理由だけで非難して欲しくない、という開き直りはやはりよくないか。ぬれたタオル、思いっきり搾ってもなお残るしずくの一適二滴、自らの手で掬ってもみよ。

## 目 次

# 1　論理のお稽古

数学における**命題** (proposition) とは、正しい（真, true）か誤っている（偽, false）か原理的にどちらかであることがはっきりしている数学的な主張をいう。この説明自体は、なかなかに曖昧なもので、とくに「原理的に」という修飾語が曲者で、正しいか誤っているか証明もできないし反例も見つかっていない命題は山ほどある。有名な Fermat 予想も最近になってようやく証明された（そうである）。科学的に見える主張であっても、

- 「相対性理論は間違っている」
- 「地球外に生命が存在する」

などは、「原理的に」真偽がわかっている類のものではないし、

- 「人間は必ず死ぬ」

という間違いなく正しい（科学的？）主張でも「数学的」でないものは、この講義の対象外である。一方、

- 「素数は沢山存在する」

は、一見したところ、数学の命題風ではあるが、「沢山」という言葉がなにを意味するかはっきりしない以上、これも、ここで扱う「命題」ではない。もしも、「沢山」の意味が「無限に多くある」ということであれば、

- 「素数は無限に存在する」

は確かに数学的な命題である。

ここで、素数の定義を思い出してみると、「$p$ は素数である」という命題は、

$p$ は自然数で、$p = mn$ となる自然数 $m, n$ があれば、$m = 1$ または $n = 1$ である

という数学的主張（命題）と同じ内容であり、この命題自体、より単純な命題

- $p$ は自然数である、
- $p = mn$ となる自然数 $m, n$ が存在する、

- $m = 1$ である、
- $n = 1$ である、

などから組み立てられている。2 つの命題 $P$, $Q$ から新たな命題

$$P \vee Q = (P \text{ or } Q), \qquad P \wedge Q = (P \text{ and } Q)$$

を、$P \vee Q$ が正しいとは「$P$ が正しいかまたは $Q$ が正しい」こと、また $P \wedge Q$ が正しいのは $P$ も $Q$ も正しいことと定める。この表記を使えば、「$m = 1$ または $n = 1$」という命題は、

$$(m = 1) \vee (n = 1)$$

と書き表される。これは、$m$, $n$ を「変数」にもつ命題なので、以下では、$Q(m, n)$ とも書き表そう。

「$p = mn$ となる自然数 $m$, $n$ が存在する」のところをさらに（論理的に）分解して表現すれば、ある $m$, $n$ が存在して、命題

$$(m \text{ は自然数}) \wedge (n \text{ は自然数}) \wedge (p = mn)$$

が成り立つ、と言い換えることができる。この命題も、$m$, $n$ という「変数」に依存して決まるので、$P(m, n)$ と書くことにすれば、上の言い換えは、

$$\text{ある } m, n \text{ が存在して } P(m, n) \text{ が成り立つ}$$

と書き直せる。実は、これは、ヨーロッパ系の言葉の語順に合わせてあるのであって、「日本語」としては落ち着きの悪い表現ではあるが、たとえば、英語で書いてみると、

“There exist $m$ and $n$ such that $P(m, n)$ is true”

といった具合に不自然なものではない。この主張を記号

$$\exists m, \exists n, P(m, n)$$

で表し、「命題 $P(m, n)$ が成り立つような $m$ および $n$ が存在する」と読み下す。$\exists$ は**存在記号** (the existential quantifier) と呼ばれる論理記号で

あり “there Exist(s)” の E を 180° 回転させたものである。存在記号は、その意味から

$$\exists n, \exists m, P(m, n)$$

と書いても同じことであるし、また、変数 $m$, $n$ を表す文字は何でもよいので、($x$, $y$ が $P(m, n)$ の中に別の意味で現れない限り)

$$\exists x, \exists y, P(x, y)$$

と書くこともできる。

　この辺の事情は、定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

の関係と似ている。こういった「見かけの変数」を**束縛変数** (bound variable) といって $p$ などのような本来の変数と区別して考えるとわかりやすい。

　さて、「$P(m, n)$ が成り立てば $Q(m, n)$ が成り立つ」の部分であるが、一般に、与えられた 2 つの命題 $P$, $Q$ に対して「$P$ が成り立てば $Q$ が成り立つ」という新たな命題は、

$$P \Rightarrow Q$$

と表記される。この命題の意味するところを考えるに、命題 $P$ が正しいときには、命題 $Q$ が正しいということで問題ないが、では命題 $P$ が間違っていたときは、どう考えるべきかというと、この場合は、上の命題は何も主張していないわけで（たとえば、$1 = 1$ といっているようなもの）、この場合も「$P$ ならば $Q$」という主張は正しいとするのが妥当である。すなわち、「$P$ ならば $Q$」という命題は、

$$(P \text{ が成り立たない}) \text{ または } (Q \text{ が成り立つ})$$

という命題と同じ内容であると約束する。そこで、命題 $P$ に対してその**否定** (negation) を $P'$ （普通は $\overline{P}$ または $\neg P$ という記号）で表すことにすれば、

$$(P \Rightarrow Q) = P' \vee Q.$$

なる表現を得る。すなわち、「$P$ ならば $Q$ である」という命題が成り立つという意味は、「$P$ が間違っているかまたは $Q$ が正しい」ことである。

*Remark .* 「$P$ ならば $Q$ である」という命題の否定は、「$P$ ならば $Q$ ではない」ではなく「$P$ であってしかも $Q$ でない」である。

かくして、「$p$ は素数である」という命題は、論理記号を使って

$$(p \text{ は自然数}) \wedge (\exists m, \exists n, ((m \text{ は自然数}) \wedge (n \text{ は自然数}) \wedge (p = mn) \\ \Rightarrow (m = 1) \vee (n = 1)))$$

と表されることがわかる。あるいは、自然数全体を表す集合の記号 $\mathbb{N}$ を使って、$P \wedge Q$ を $P, Q$ と略記する慣例に従い、また $\Rightarrow$ は他の記号と比べて強い結びつきを表すという約束により前後の括弧を省略すれば、

$$p \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, p = mn \Rightarrow (m = 1 \text{ or } n = 1)$$

と簡潔かつ内容を理解しやすい形の表現を得る。

次に、「$\exists m,\, P(m)$」という形の命題の否定（命題）について考えてみよう。これは、「$P(m)$ が成り立つような $m$ が一つは存在する」ということであるから、その否定は、「どんな $m$ を取ってきても $P(m)$ が成り立たない」となる。これは、$P(m)$ の否定 $P(m)'$ を使うと、「どんな $m$ を取ってきても $P(m)'$ が成り立つ」とも表現できて、この命題を記号

$$\forall m,\ P(m)'$$

で表す。記号 $\forall$ は、‘All’ の A を $180^\circ$ 回転させたものであり、“for all” と読み下す。同様に考えて、

$$(\forall m,\ Q(m))' = \exists m,\ Q(m)'$$

である。

**命題 1.1 (命題演算の公式).**

(i) (交換法則) $P \wedge Q = Q \wedge P$, $P \vee Q = Q \vee P$.

(ii) (結合法則)

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R), (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R).$$

(iii) (分配法則)

$$(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R), (P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R).$$

(iv) $(P \wedge Q)' = P' \vee Q'$, $(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$.

(v) $(P')' = P$.

**問 1.** 次の命題は常に正しいこと（背理法の原理）を確認。

$$Q' \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P'.$$

**問 2.** いわゆる三段論法を証明せよ。

**問 3.** 「$P$ ならば $Q$ である」という主張（命題）は、「$Q$ でなければ $P$ でない」という主張（もとの命題の対偶、contraposition、という）と同じ内容である。これを確認。

**問 4.** 日常的な主張にも**形式論理** (formal logic) の考えは有効ではあるが、使用する際には注意が必要。とくに因果関係を問題にしている場合には。

(i) 「非常時にはゴルフをしない」の否定は「非常時にはゴルフをする」とはならない。

(ii) 「大学に入学できたら遊ぶ」の対偶を「遊ばないと大学に入学できない」としてはおかしい。

正しくは、どのように述べるべきか。

*Remark* . 次は日本語固有の問題という訳ではないが、「全ての $x$ に対して $x + y = 0$ となる $y$ が存在する」という表現は、

- 「全ての $x$ に対して（$x + y = 0$ となる $y$ が存在する）」
- 「（全ての $x$ に対して $x + y = 0$）となる $y$ が存在する」

の何れであるのか意味が曖昧である。論理記号で書けば、この二つはそれぞれ

- $\forall x, \exists y, x + y = 0,$
- $\exists y, \forall x, x + y$

となる。前者においては、$y$ は $x$ に依存してよい（$y = -x$ と取れる）のに対して、後者の $y$ は $x$ に無関係に存在しないといけない（ふつうそのような $y$ はない)。

　こういった事情から、

$$\forall x, \exists y$$

を読む下す際には、

「どのような $x$ を取って来ても、それぞれに応じてある $y$ が存在して」

とするのがよい、と教える本もある。

## 2　集合のお作法

**集合** (set) の**要素**（元）(element)。

$$\{1, 2, 3, \dots, n\} = \{2, 1, 3, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, n, 1\}.$$

集合をこのように要素を列挙して表す場合には、その順番および何度出てきたかは問題にせずに（気にしないで）同じ集合を表す（と約束する）。

$$[a, b] = \{x; x \text{ は } a \le x \le b \text{ となる実数 }\}.$$

この表し方は、性質でもって集合を規定するもので、もっとも多く用いられる。区切り記号としては「;」以外にも「|」あるいは「:」がよく使われる。

数の集合

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\}, \\
\mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合}, \\
\mathbb{Q} &= \text{有理数全体の集合}, \\
\mathbb{R} &= \text{実数全体の集合}, \\
\mathbb{C} &= \text{複素数全体の集合}.
\end{aligned}$$

自然数 (Natural number)、整数 (integer, Zahlen)、有理数 (rational number)、無理数 (irrational number)、実数 (Real number)、複素数 (Complex number)。

有理数の原語 rational $\Leftarrow$ ratio（比）、有比数。とすれば irrational number の「正しい訳語」は、無比数！

- **部分集合** (subset) の記号 $A \subset B$ には、等号 $A = B$ を許す。**空集合** (empty set), $\emptyset = \{\ \}$.
- **有限集合** (finite set) と**無限集合** (infinite set)。有限集合 $A$ に対して、$|A| = A$ の要素の個数。
- **和** (union) と**共通部分** (intersection), $A \cup B$, $A \cap B$.

**命題 2.1.**

(i) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

全体集合 (universal set) と**補集合** (complement)、$A'$ または $A^c$.

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
- $(A')' = A$, $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$.

**差集合** (difference set),

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\} = \{x \notin B; x \in A\}.$$

**集合の族** (a family of sets), $\{A_i\}_{i \in I}$, 添え字集合 (index set).

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a; \exists i \in I, a \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{a; \forall i \in I, a \in A_i\}.$$

**命題 2.2.**

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'.$$

**積集合** (product set), $A \times B$, $A \times B \times C$ など。$A^n = A \times \cdots \times A$.

- $\mathbb{R}^2 =$ 平面、
- $\mathbb{Z}^2 =$ 二次元格子、
- $\mathbb{R}^3 =$ 3次元空間。

*Remark .* 二次元ベクトル、開区間、二次元座標はしばしば同じ記法で書き表される。意外に混乱しないものではあるが、「こだわる」人は、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad ]a, b[, \qquad (a, b)$$

などと区別したりするが、気休め程度のもの。

**例題 2.3 (Sieve Formula).** 有限集合 $A$ の部分集合の列 $\{A_j\}_{1 \le j \le n}$ と $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合 $I$ に対して、$A_I = \cap_{i \in I} A_i$ とおくとき、

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} |A_I|.$$

**問 5.** 上の「篩の公式」の証明を考える。

*Remark .* Cantor が創めた集合論は、素朴な数学的常識に基づくものであったが、その後、そのような「素朴な定義」では矛盾が生じることが明らかになった。その中でも有名な **Russel のパラドックス**というのは次のようなものである。

集合 $x$ に対して、$x \in x$ という性質を素朴に考える。ここで、「素朴に考える」とは、集合 $x$ に対して、いつでも $x \in x$ であるかそうでないかがはっきりしているはずだという立場である。常識的に考えると、$x \in x$ であるような集合はないので、すべての集合は $x \notin x$ であると、思われる。ところが、$y = \{x; x \notin x\}$ という集合を考えると、仮に $y \in y$ とすると、この性質から $y \notin y$ が導かれ矛盾である。一方、$y \notin y$ と仮定すると、$y$ 自身は集合 $y$ を規定している性質を満たすので、$y \in y$ となりやはり矛盾である。

これは、集合という言葉の意味を曖昧にしたまま「全ての集合」が再び集合であるとすると、矛盾が生じるということで、このあたりの吟味から現代的な集合論が始まった。(吉永 良正「ゲーデル・不完全性定理」(講談社、ブルーバックス) あたりから入ってみよう。)

# 3　写像のお作法

二つの集合 $X, Y$ を用意する。$X$ の各要素 $x$ に対して $Y$ の要素 $f(x)$ が定められているとき、この対応の規則を**写像** (map) という。$f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ といった書き方をする。$X$ を $f$ の**定義域** (domain)、$Y$ を $f$ の**値域** (range) という。別の写像 $f' : X' \to Y'$ に対して、$f = f'$ というのは、$X = X'$, $Y = Y'$ かつ $\forall x \in X, f(x) = f'(x)$ であることと定義する。写像 $f : X \to Y$ でとくに $Y$ が数の集合であるとき、**関数** (function)、$X = \mathbb{N}$ のとき**列** (sequence) ということが多い。

- $f : X \to \mathbb{R}$, 実数値関数
- $f : X \to \mathbb{C}$, 複素数値関数。
- 定義域が $\mathbb{N}$ で値域が $\mathbb{R}$ である写像をふつう数列とよぶ。

**合成写像** (composite map) と**結合法則** (associativity law) 。$X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ のときには合成関数という言い方もする。

**恒等写像** (identity map)。

写像の**像** (image) と**逆像** (inverse image)。

写像の**制限** (restriction)。

**命題 3.1.**

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(iv) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**単射** (injection)、**全射** (surjection)、**全単射＝双射** (bijection)。**逆写像** (inverse map)。１対１の写像、上への写像。

**例題 3.2.** 折り返し法による最短経路の数え方。

**問 6.** $m$ 個の集合から $n$ 個の集合への単射の個数は、

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

である。全射の個数 $S(m,n)$ は

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(m,k) = n^m$$

をみたし、これから

$$S(m,n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

**問 7.** 集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ から集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ への全単射 $f$ で $f(j) \neq j$ となるものの個数は、

$$R_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

である。$R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $R_4 = 9$ など。

ヒント： $A_j = \{f \in S_n; f(j) \neq j\}$ とおいてふるいの公式を使う。はて、$S_n$ って何だろう。

# 4 無限の数え方

（無限）集合の「個数」を比較するために、

**補題 4.1.** 2 つの集合 $A, B$ に対して、次の条件は同値。

(i) $A$ から $B$ への単射が存在する。

(ii) $B$ から $A$ への全射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、$|A| \leq |B|$ または $|B| \geq |A|$ と書くことにする。

**定理 4.2 (Bernstein).** 次の条件は同値である。

(i) $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ である。

(ii) 集合 $A$ から集合 $B$ への全単射が存在する。

この同値な条件が満たされるとき、2 つの集合 $A, B$ は同じ**基数** (cardinal number) を持つといい、$|A| = |B|$ あるいは $A \sim B$ と書く。「基数」のかわりに**濃度**という言い方をすることも多い。有限集合については、基数が等しいことと集合の要素の個数が等しいこととは、同値であるので、「基数」は「個数」の概念を拡張したものになっている。以下では、用語の直感的なわかり易さを優先させて「個数」という言い方も用いることにする。

*Proof.* 系図を考える。 □

**問 8.** Bernstein の定理の証明について調べ、納得する。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同じ「個数」をもつ集合を**可算集合** (countable set) という。可算集合の「個数」を $\aleph_0$ (アレフゼロと読む)、実数の集合 $\mathbb{R}$ の「個数」を $\aleph$ (アレフと読む、ヘブライ語のアルファであるらしい) で表す。

**例題 4.3.** 自然数全体と偶数全体あるいは奇数全体は同じ「個数」をもつ。$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ は可算集合である。代数的数全体も可算集合。

**命題 4.4.** 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ で、$I$ が可算集合であり各 $i \in I$ に対して $A_i$ も可算集合であれば、

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

も可算集合。

*Proof.* 簡単のために、$I = \mathbb{N}$ とし、

$$A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots\}$$

と並べて云々。 □

**例題 4.5.** $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2$ は可算集合である。代数的数全体も可算集合。

**命題 4.6.** 無限集合 $A$ に対して、$A \sqcup \mathbb{N}$ は $A$ と同じ「個数」をもつ。

*Proof.* $A$ は無限集合であるから、単射 $f : \mathbb{N} \to A$ が存在する。このとき、$f(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ と対等であり、

$$A \sqcup \mathbb{N} = (A \setminus f(\mathbb{N})) \sqcup f(\mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N} \sim (A \setminus f(\mathbb{N})) \sqcup f(\mathbb{N}) = A.$$

□

**例題 4.7.** 実数の集合 $\mathbb{R}$ と無理数の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は同じ「個数」をもつ。

集合 $A$ に対して、$A$ の全ての部分集合からなる集合（集合の集合！）を $2^A$ と書いて、$A$ の**冪集合** (power set) と呼ぶ。

**例題 4.8.** $A$ が有限集合のとき、$2^A$ の個数は、$2^{|A|}$.

**定理 4.9.** 任意の集合 $A$ に対して、冪集合 $2^A$ の「個数」は $A$ の「個数」よりも真に大きい。

*Proof.* 仮に $A$ から $2^A$ への全射 $f$ があったとすると、各 $a \in A$ に対して、$f(a)$ は $A$ の部分集合を意味する。そこで、$A$ の部分集合 $B$ を

$$B = \{a \in A; a \notin f(a)\}$$

で定めると（$B$ は空集合かもしれない）、全ての $a \in A$ に対して、$B \neq f(a)$ である。実際、$a \in f(a)$ とすると、$a \notin B$ であるから、$B = f(a)$ とはなり得ないし、また、$a \notin f(a)$ とすると、$a \in B$ であるから、この場合も $B \neq f(a)$。

以上により、$A$ から $2^A$ のどんな写像も全射にはなり得ない。 □

**系 4.10 (Cantor).** 実数の集合は可算ではない。

実数の二進展開。$A = 2^{\mathbb{N}}$ から $[0,1]$ への全射 $f$。有限個の項を除いて全て 0 か全て 1 となる数列からなる $2^{\mathbb{N}}$ の数列全体を $A'$、$A'' = A \setminus A'$ とおくと、$A''$ は無限集合であり（勝手な長さの周期をもった列を考える）、$f$ は $A''$ の上で単射になる。一方、$A'$ は可算集合であるから、この二つから、$2^{|\mathbb{N}|} = |A''| = |f(A'')| = |[0,1]|$ がわかる。

**例題 4.11. 超越数** (transcendental number) 全体は $\mathbb{R}$ と同じ「個数」。
$\pi = 3.14159\ldots$, $e = 2.71828\ldots$ は具体的（？）な超越数。

**命題 4.12.** $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ は同じ「個数」をもつ。

# 5　実数の連続性

実数からなる集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して、実数 $a$ が $A$ の**上界**（じょうかい、upper bound）であるとは、

$$A \subset (-\infty, a]$$

であること。また、**下界**（「かかい」と読むらしい、lower bound）であるとは、

$$A \subset [a, +\infty)$$

となること。上界、下界ともに存在するとき、集合 $A$ は**有界** (bounded) であるという。

自然数の集合は下界を持つが、上界は存在しない。整数の集合は、上界も下界ももたない。有限区間 $[a, b]$ などは、有界。

実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は、その像 $\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\}$ が有界のとき、**有界関数**であるという。関数 $f$ が有界であることを形式的に表現すれば、

$$\exists M > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq M$$

となる。

実数には**連続性** (continuity) と称される重要な性質がある。この連続性にはいくつかの同値な言い換えがあるが、ここでは次の性質を採用する。

**区間縮小法の原理**（空でない）閉区間の減少列 $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$ で、区間の幅 $|I_n|$ が $0$ に近づくものの共通集合は、一つの実数からなる。$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n$ とおけば、

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

である。

**命題 5.1.** 上に（下に）有界な集合 $A$ は最小の上界（下界）をもつ。さらに最小上界は、$A$ から選んだ数列の極限として表される。

*Proof.* $A$ の要素 $a_1$ および $A$ の上界のひとつ $b_1$ を勝手に選びその中点 $(a_1 + b_1)/2$ を $c_1$ とする。区間 $[c_1, b_1]$ に含まれる $A$ の点が存在するときは、そのような点をひとつ取ってきて $a_2$ と名づけ $b_2 = b_1$ とおく。もし、区間 $[c_1, b_1]$ と $A$ が共通部分を持たないときは、$c_1$ が $A$ の上界になるの

で、$a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ とおく。以下、この操作を繰り返すと、$A$ の要素の単調増大列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ と $A$ の上界からなる単調減小列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を取りだすことができ、さらに、作り方から、$|b_n - a_n| \leq |b_{n-1} - a_{n-1}|/2$ であるので、区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ は区間縮小法の条件をみたす。したがって、実数 $c$ を

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

によって定めることができる。

まず、$c$ は $A$ の上界である。というのは、$a \in A$ に対して、$b_n$ は $A$ の上界であることから、$a \leq b_n$ が任意の $n$ について成り立ち、したがってその極限として $a \leq c$ が成り立つ。

次に、$c$ は $A$ の上界の中で最小のものであること。$A$ の上界 $b$ を勝手に取るとき、$a_n \leq b$ がすべての $n$ に対して成り立つので、やはり極限を取って、$c \leq b$ となるからである。 □

上の証明方法を、**無限部屋割り論法**と呼ぶことにする。さらに、この証明方法をなぞれば、次のこともわかる。

**系 5.2.** 単調増加（あるいは単調減少）数列は、発散しなければ収束する。

*Remark .* 本来の部屋割り論法は次のようなものである。$n+1$ 個の互いに異なる自然数があれば、その中から 2 つ選んでその差が $n$ で割り切れるようにできる。

上に有界な実数の集合 $A$ に対して、その最小の上界を $A$ の**上限** (supremum) とよんで、$\sup A$ と書く。上界をもたない（実数の）集合 $A$ に対しては、$\sup A = +\infty$ といった書き方をする。

同様に、下に有界な実数の集合 $A$ に対して、その最大の下界を**下限** (infimum) とよんで、記号 $\inf A$ で表す。(superior, inferior, inferno, infinite)

**例題 5.3.**

(i) 集合 $A = \{1/n; n = 1, 2, \dots\}$ に対して、

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = 0.$$

(ii) 開区間 $A = (a, b)$, $a < b$, に対して、

$$\sup A = b, \qquad \inf A = a.$$

**問 9.** 空集合 $\emptyset$ に対しては、$\sup\emptyset$, $\inf\emptyset$ をどう定義するのが合理的か。

実数列の**上極限** ($\limsup$)、**下極限** ($\liminf$) の定義。

**定理 5.4.** 実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して次は同値。

(i) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は、収束する。

(ii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ である。

(iii) $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$ である。

*Proof.* (iii) $\Rightarrow$ (ii): $b_n = \inf\{a_k; k \geq n\}$, $c_n = \sup\{a_k; k \geq n\}$ とおくと、$b_N$, $c_N$ は、数列 $\{a_N, a_{N+1}, \dots\}$ の部分列の極限だから、

$$0 \leq c_N - b_N \leq \sup\{|a_m - a_n|; m, n \geq N\} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): 仮定により、$\lim b_n = \lim_n c_n$ であるから、

$$\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subset [b_n, c_n]$$

の右辺に区間縮小法を適用すると、数列 $\{a_n\}$ はひとつの実数に近づくことがわかる。

(i) $\Rightarrow$ (iii): $\lim_n a_n = a$ とすると、

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty.$$

□

上の定理の (iii) の条件をみたす実数列を**コーシー列** (Cauchy sequence) とよぶ。収束先を使わずに、数列の収束性を判定できるので、理論的に重要である。フランスの数学者 A. L. Cauchy に因む。

**定理 5.5 (Bolzano).** 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ から収束する部分列を取り出すことができる。

*Proof.* これも無限部屋割論法により、Cauchy 列を取り出す。 □

# 6　定積分の存在

最初に、ギリシャ文字についての講釈。

閉区間 $[a,b]$ の上で定義された関数 $f(x)$ の定積分の定義について。区間の分割 $\Delta$ と分割の細かさ $|\Delta|$。分割の代表点 $\xi = \{\xi_j\}_{1\le j\le n}$ とリーマン和

$$S(\Delta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

$|\Delta| \to 0$ でありさえすれば、分割の仕方および代表点 $\xi$ の選び方に無関係に、リーマン和 $S(\Delta,\xi)$ が一定の値に近づくとき、その近づく先の値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書いて、関数 $f$ の区間 $[a,b]$ における**定積分** (definite integral) と呼ぶ。

関数 $f$ が連続であるとき、Cauchy は次のように考えて、その定積分が「存在する」と結論した。分割の列 $\{\Delta_k\}_{k\ge1}$ を、各 $\Delta_k$ が $\Delta_{k-1}$ の細分割でしかも $|\Delta_k| \to 0$ $(k\to\infty)$ あるようにとるとき、数列 $\{S_k = S(\Delta_k,\xi^{(k)})\}$ がコーシー列であればよい。そのためには、和 $S_l$ の項ををより粗い分割 $\Delta_k$ $(k<l)$ でくくり直せば、

$$f(\xi)(y-x), \qquad \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

の比較が問題である。

これを調べるために、$\delta > 0$ に対して、

$$M(\delta) = \sup\{|f(s)-f(t)|; |s-t|\le\delta\}$$

なる量を導入する。これを使えば、

$$\begin{aligned}\left|f(\xi)(y-x) - \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right| &= \left|\sum_j (f(\xi) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1})\right| \\ &\le \sum_j |f(\xi) - f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\le M(\delta)\sum_j (x_j - x_{j-1}) \\ &= M(\delta)(y-x),\end{aligned}$$

ただし $\delta = |\Delta_k|$, となるので、さらに和をとって、

$$\left|S(\Delta_k, \xi^{(k)}) - S(\Delta_l, \xi^{(l)})\right| \le M(|\Delta_k|)(b-a), \quad k \le l$$

を得る。

**問 10.** 二つの分割 $\Delta', \Delta''$ と代表点の列 $\xi', \xi''$ に対して、$\delta = \max(|\Delta'|, |\Delta''|)$ とおくと、

$$|S(\Delta', \xi') - S(\Delta'', \xi'')| \le 2M(\delta)(b-a)$$

である。これを示せ。

**命題 6.1.** 関数 $f$ が、$M(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ という性質をみたせば、すなわち

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x) - f(y)|; |x-y| \le \delta\} = 0$$

であれば、定積分

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

が存在する。

ここで、この条件が関数 $f$ の連続性、

$$y \to x \quad \Rightarrow \quad f(y) \to f(x)$$

から即座に導かれるわけではないことに注意しよう。

この二つの条件は、言葉で曖昧に表現すれば、

$x$ と $y$ が近ければ、$f(x)$ と $f(y)$ も近い

となるので、うっかりしそうな所ではあるが、後ほど見るように論理記号を使って正確に表現すれば、積分の存在を保証する連続性（一様連続性という）の方が、単なる（各点での）連続性よりも強い条件であることがわかる。

しかしながら、関数の定義域が有限閉区間であるときには、この弱い方の連続性から、強い連続性を導くことが可能である。

この辺の事情を以下で詳しくみていこう。

# 7 連続関数の怪

極限操作の正確な表現。数列の極限。防衛ラインと敵の侵略ゲーム。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon.$$

*Remark* . コーシー列の正確な定義は、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |a_m - a_n| \leq \epsilon.$$

**問 11.** 数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束するということは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq 2\epsilon.$$

と書いてもよい。あるいは最後の $2\epsilon$ の 2 を任意の ($\epsilon$ などとは無関係な）正数で置き換えても同じ内容（命題として同じ主張）である。これを確かめよ。

**例題 7.1.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

*Proof.* どんなに小さく $\epsilon > 0$ を選んだとしても、自然数 $N$ を大きくとれば、

$$\forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon$$

となる。このとき、$n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \frac{1}{n}\left(|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|\right) \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \epsilon\end{aligned}$$

となる。そこで、自然数 $N' \geq N$ をさらに大きくとって、

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{N'} \leq \epsilon$$

となるようにしておけば、$n \geq N'$ に対しては

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leq 2\epsilon$$

となる。 □

**問 12.** 数列 $\{a_n \geq 0\}$ が $a \geq 0$ に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$$

である。

**命題 7.2.** 次は同値。

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii): (ii) を否定すると、

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, |x-a| \leq \delta, |f(x) - f(a)| > \epsilon.$$

そこで、$\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と選ぶと、$\exists x = a_n$,

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(a_n) - f(a)| > \epsilon.$$

これは

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$$

ということだから、(i) が成り立たない。

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を仮定すると、

$$\forall \delta > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq \delta$$

となる。そこで、$\forall \epsilon > 0$, (ii) で存在が保証されている $\delta > 0$ をとり、この $\delta$ に対して、上の条件をみたす $N$ を選んでおけば、$\forall n \geq N$,

$$|a_n - a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - f(a)| \leq \epsilon$$

となって、これは $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ を意味する。 □

**定義 7.3.** 上の同値な条件をみたすとき、関数 $f$ は $x = a$ で**連続である** (continuous) という。定義域に属するすべての $a$ で連続であるとき、$f$ は連続であるという。

**Cantor 集合と Cantor 関数**

区間 $[0,1]$ 内の実数を三進展開して

$$[0.c_1c_2\ldots]_3 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{3^j}$$

と表す。ここで数列 $\{c_j\}_{j\geq 1}$ は、$c_j \in \{0,1,2\}$。第一のステップで、$[0,1]$ から、開区間 $([0.1]_3,[0.2]_3)$（これは、$[0,1]$ を三等分した中央の部分）を除く。次に残った 2 つの区間をそれぞれ三等分しやはり中央部分の開区間

$$([0.01]_3,[0.02]_3), \qquad ([0.21]_3,[0.22]_3)$$

を除く。以下、これを繰り返し、$n$ ステップ目では、幅 $3^{-n}$ の $2^{n-1}$ 個の開区間を取り除くと、結局残るのは、

$$[0.c_1c_2\ldots]_3, \qquad c_j \in \{0,2\}$$

の形の実数全体 $C$ となる。この残った部分を Cantor 集合とよぶ。これの「個数」は、$2^{\mathbb{N}}$ だけあるので、実数の「個数」と等しい。一方、取り除く区間の長さの総和は、

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots = 1$$

となって、Cantor 集合の「長さ」は零であることがわかる。

三進展開を利用して、この Cantor 集合の上だけで「増加」する閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 (Cantor 関数) を作ってみよう。三進実数 $c = [0.c_1c_2\ldots]_3$ に対して、二進実数 $f(c)$ を次のように定める。$c \notin C$ のときには、$n \geq 0$ を $c_j \neq 1$ for $1 \leq n$ and $c_{n+1} = 1$ として、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\ldots\frac{c_n}{2}1\right]_2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

とおく。$c \in C$ のときには、$c_j \neq 1$ for $j \geq 1$ であるから、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\ldots\right]_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{2^{j+1}}$$

とおく。そうすると、(i) $f$ は単調増加連続関数で、(ii) $[0,1]\setminus C$ の上では微分可能で、$f'(x) = 0$ である。

かくの如く連続関数とは「恐ろしい」ものである。と同時に、具合のいいものでもある。

**定理 7.4.** 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数に対しては、最大値・最小値がともに存在する。

*Proof.* Bolzano の定理による。 $\square$

**定理 7.5 (Mean Value Theorem).** 有界閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 $f$ の最大値・最小値をそれぞれ $M$, $m$ であらわすとき、

$$\{f(t); t \in [a,b]\} = [m,M]$$

が成り立つ。

*Proof.* 最大値・最小値を与える点の座標を改めて、$a$, $b$ と取り直して、$(M,m) = (f(a), f(b)$ または $(M,m) = (f(b), f(a))$ と仮定してよい。一般に、2 つの実数 $\alpha$, $\beta$ に対して $[\alpha,\beta]$ または $[\beta,\alpha]$ に含まれる実数を $\alpha$, $\beta$ の中間点と呼ぶことにする。さて、勝手に選んだ $\mu \in [m,M]$ に対して、区間 $[a,b]$ を二等分して、$[a,c]$, $[c,b]$ を考えると、$\mu$ は、$(f(a), f(c))$ または、$(g(c), f(b))$ の中間点である。そこで、中間点になっている方の区間を $[s_1,t_1]$ と名付け、さらに $[s_1,t_1]$ を二等分して、この議論を続けると、実数列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ で、

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots < \cdots \leq t_2 \leq t_1, \qquad t_n - s_n = \frac{t_1 - s_1}{2^{n-1}}$$

であり、$\mu$ が $f(s_n)$, $f(t_n)$ の中間点となっているものが存在する。区間縮小法の原理により、

$$s_\infty = \lim_n s_n, t_\infty = \lim_n t_n$$

が存在して一致する。一方、$\mu$ が $f(s_n)$, $f(t_n)$ の中間点であることから、

$$|f(t_n) - \mu| \leq |f(t_n) - f(s_n)| \leq |f(t_n) - f(t_\infty)| + |f(s_\infty) - f(s_n)|$$

となって、極限を取って、$f$ の連続性を使えば、

$$\mu = f(t_\infty)$$

であることがわかる。 $\square$

**命題 7.6.** 有界閉区間 $[a,b]$ で連続で、その内部 $(a,b)$ で微分可能な関数 $f(t)$ が、$|f'(t)| \leq M$, $a < t < b$ ($M > 0$ は定数) をみたすならば、

$$|f(s) - f(t)| \leq M|s-t|, \qquad s,t \in [a,b].$$

*Proof.* 背理法で証明する。仮に、上の不等式が成り立たないとすると、$a < s_1 < t_1 < b$ と $M' > M$ で、

$$|f(s_1) - f(t_1)| \geq M'|s_1 - t_1|$$

となるものが存在する。$s_1$ と $t_1$ の中点 $u = (s_1 + t_1)/2$ を考える。ここでもし、

$$|f(s_1) - f(u)| < M'|s_1 - u|, \quad |f(u) - f(t_1)| < M'|u - t_1|$$

であれば、

$$|f(s_1) - f(t_1)| < M'|s_1 - t_1|$$

が成り立つので、どちらかの不等式は成り立たない。成り立たない方の点の組み合わせを $s_2 < t_2$ と名付けると、

$$s_1 \leq s_2 < t_2 \leq t_1, \qquad t_2 - s_2 = \frac{t_1 - s_1}{2}$$

であり、

$$|f(s_2) - f(t_2)| \geq M'|s_2 - t_2|$$

となる。以下、この作業を続けると、実数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ で、

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots < \cdots \leq t_2 \leq t_1, \quad t_n - s_n = \frac{t_1 - s_1}{2^{n-1}}$$

をみたし、

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geq M'|s_n - t_n|$$

となるものの存在がわかる。

区間縮小法の原理により、実数 $c$ を

$$c = \lim_n s_n = \lim -n t_n$$

で定め、各 $n$ に、$s_n \leq c \leq t_n$ に上の議論を適用して、$c_n = s_n$ または $c_n = t_n$ を

$$|f(c_n) - f(c)| \geq M'|c_n - c|$$

が成り立つように選んでいけば、

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} \right| \geq M' > M$$

となって、$|f'(c)| \leq M$ と矛盾する。 □

**系 7.7.** 開区間 $(a,b)$ の上で定義された関数 $f$ が微分可能で、$f'(t)=0$, $a<t<b$ であるならば、$f$ は定数関数である。

**例題 7.8.** 正の数 $\delta$ に依存して決まる実数 $M(\delta)$ に対して、

$$\lim_{\delta\to 0} M(\delta)=0$$

という主張の否定（命題）は、

$$\exists\epsilon>0, \forall\delta>0, |M(\delta)|\geq\epsilon.$$

**補題 7.9 (一様連続性, uniform continuity).** 連続関数に対して、

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x)-f(y)|; |x-y|\leq\delta\}=0.$$

*Proof.* 仮に上の補題が成り立たないとすると、

$$\exists\epsilon>0, \forall\delta>0, \exists x(\delta), y(\delta), |x-y|\leq\delta, |f(x)-f(y)|\geq\epsilon.$$

$\delta$ として $1/n$ を取ってきたときの $x(\delta)$, $y(\delta)$ を $x_n$, $y_n$ で表せば、

$$|x_n-y_n|\leq\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon,\qquad n=1,2,\ldots$$

である。Bolzano の定理により、$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ で収束するものを取ってきて、$c=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}$ とすると、

$$|f(x_{n_j})-f(y_{n_j})|\leq|f(x_{n_j})-c|+|f(y_{n_j})-c|\to 0\qquad (j\to\infty)$$

となって矛盾である。 □

**定理 7.10.** 閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 $f$ に対して、その積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

が存在する。

**命題 7.11.** 関数 $f(t)$ が $t=c$ で最大値（または最小値）をとり、かつ $t=c$ で微分可能であれば、$f'(c)=0$.

**問 13.** 上の補題を利用して、いわゆる「平均値の定理」を導く。

**問 14.** 各点連続性と一様連続性を論理記号を使って表せば次のようになる。

$$\forall\epsilon > 0, \forall x, \exists\delta > 0, \forall y, |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \epsilon,$$
$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \forall y, |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \epsilon.$$

**問 15.** 積分の（基本）不等式を使って、連続関数 $f$ に対して、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad a < x < b$$

を示せ。

*Remark .* 上の問と系 7.6 から、$f'(t)$ が連続関数であれば

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

という見なれた公式に帰着するが、単に $f'(t)$ があるというだけでは、そもそもこの積分の存在すら覚束ない。

それにも関らず、$M = \sup\{|f'(t)|; a < t < b\}$ とすると、

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|, \qquad x, y \in (a,b)$$

が成り立つ。（無限部屋割り論法。）

# 8　分割と同値類

集合のグループ分け（disjoint union, partition）から、**同値関係** (equivalence relation) へ。**同値類** (equivalence class) と**商集合** (quotient set)。

集合 $A$ を互いに共通部分のない部分集合の「和」として

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

のようの表すとき、部分集合の集まり $\{A_i\}_{i \in I}$ を集合 $A$ の**分割** (partition) と呼ぶことにする。

**例題 8.1.** 各整数 $n$ ごとに、$A_n = [n, n+1)$ とおくと、$\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ の分割を与える。

このように集合 $A$ の分割が与えられると、任意に選んだ二つの要素 $a$, $b \in A$ は、同じ部分集合に属するか、異なる部分集合に属するかのいずれかである。そこで、同一の部分集合に属する場合に、記号 $a \sim b$ で表すことにすれば、

(i) $a \sim a$,

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$,

(iii) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

である。

一般に、与えられた集合 $A$ の中の勝手な二つの要素 $a, b$ (正確には要素の組 $(a, b)$ ) に対して、ある性質が成り立つかどうかが問題になっているとき、その性質がみたされることを記号 $a \sim b$ で表して、集合 $A$ に (ある性質による) **関係** (relation) が定義されているといった言い方をする。もっと形式的に表現すれば、

$$R = \{(a, b) \in A \times A; a \sim b\}$$

なる積集合 $A \times A$ の部分集合 $R$ を指定することと、「関係」を与えることは同じことになる。すなわち、

$$a \sim b \iff (a, b) \in R.$$

「関係」でとくに、上の三性質を満たすものを**同値関係** (equivalence relation) と呼ぶ。こういった用語を使えば、上で述べた事実は、集合 $A$ の分割は、$A$ の同値関係を定める、と書き表すことができる。

実は、この逆も成り立つ。集合 $A$ の与えられた同値関係 $\sim$ に対して、各 $x \in A$ に対して、

$$A(x) = \{a \in A; a \sim x\}$$

と置くと、$x \in A(x)$ であるので、

$$A = \cup_{x \in A} A(x).$$

さらに、

$$A(x) \cap A(y) \neq \emptyset \Rightarrow A(x) = A(y)$$

である。実際、$a \in A(x) \cap A(y)$ とすると、$a \sim x$, $a \sim y$ であるから、$b \in A(x)$ に対して、($a \sim x \Rightarrow x \sim a$ に注意して)

$$b \sim x, a \sim x, a \sim y$$

を合わせると、$b \in A(y)$ が分かるので、$A(x) \subset A(y)$ であるし、対称性から、$A(y) \subset A(x)$ でもある。

したがって、$A$ の部分集合の集まり $\{A(x)\}_{x \in A}$ は共通部分がないか完全に一致するかのいずれかであり、$I = \{A(x); x \in A\}$ を $A$ の部分集合の作る (無駄を省いた) 集合とし、$i \in I$ に対して、$i$ の表す $A$ の部分集合を $A_i$ と書くことにすれば、

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

となって、$A$ の分割が得られた。

部分集合 $A(x)$ は、$x$ の定める (あるいは、$x$ を含む) **同値類** (equivalence class) と呼ばれ、$[x]$ という記号で表されることも多い。また、同値類 全体の集合 $I$ は、$A/\sim$ とも表記され $A$ の**商集合** (quotient set) 、$x \in A$ にその同値類を対応させる写像 $A \to A/\sim$ を**商写像** (quotient map) と称される。

**例題 8.2.** 自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対して、関係を

$$a \sim b \iff a - b \text{ が } 7 \text{ で割り切れる}$$

で定めると、同値関係になり、カレンダーの場合、曜日が同値類を表し、その商集合は、曜日の集合と同一視できる。

- 自然数から整数、整数から有理数へ。「定義が意味をもつ」(**well-defined**) という言い方。
- 有理数から実数へ。Cantor の構成方法 (有理 Cauchy 列の同値類)。$0.999\cdots = 1$ の正体。
- 並べ替えの同値関係と組み合わせの数。