# 実数論

微積分の基礎をめぐって

山上　滋

平成 18 年 7 月 31 日

## 目 次



[参考書]

瀬山士郎「無限と連続」の数学（東京図書）
遠山　啓「無限と連続」（岩波新書）
田島一郎「イプシロン・デルタ」（共立出版）
ハイラー・ワナー「解析教程（下巻）」（シュプリンガー）
荷見・堀内「現代解析の基礎」（内田老鶴圃）

## 1　実数論の背景

Isaac Newton (1642–1727)
Gottfried Leibnitz (1646–1716)
Jakob Bernoulli (1654–1705)
Johann Bernoulli (1667–1748)
Leonhard Euler (1707–1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
Bernhard Bolzano (1781–1848)
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)
Karl Weierstrass (1815–1897)
Bernhard Riemann (1826–1866)
Richard Dedekind (1831–1916)
Georg Cantor (1845–1918)

数学の特色として、できるだけ曖昧さを排除した、論理的な紛れがない形で成り立つ事実を追求するといった点を挙げることができるでしょう。いわゆる証明と称されるものです。計算は得意だが証明は苦手、という人は多いのではないでしょうか。もっとも、計算といってもただ体力勝負の工夫もなにもないものは、数学的価値感とは別種のものではありますが。

さて解析学では、「無限」が関係した計算を主として扱います。古代より無限性は人間の認識の限界を越えるもの、といった見方が一般的でしたが、徐々に無限を飼いならす方法を会得してきました。それでも、時として思わぬ落とし穴に出くわしたりします。素朴な計算が矛盾した結論を導いたり、あるいは素朴な推論ではどうにも説明できない関係式に遭遇することもあります。そういったものがある程度蓄積されると、根本から徹底的に調べて紛れがないように整理してみようという機運が高まることになります。

微積分の歴史においては、創業者である Newton, Leibnitz、その直接的な後継者である Bernoulli 兄弟、Euler 等の華々しい活躍の後に、こういった反省が起きました。１９世紀前半でのできごとです。

それまで、あいまいに用いられていた「無限小」という考え方が論理的に厳密な紛れのないのもで置き換えられていきました。さらには、微積分の拠って立つ実数の存在性にまでメスが入れられるようになりました。(Cantor(1872), Dedekind(1872))

その成果が余りにも見事であったためでしょうか、以後、この方法が高等数学を学ぶものにとっての必須項目となりました。とくに数学の専門家を目指す人にとっては、厳密な論理の実践教育として広く使われて久しいのですが、さて、数学の利用者あるいは準専門家にとってはどうでしょうか、これが唯一の方法とも教材とも思われません。むしろ古典を鑑賞するといった態度が適切であるような気がします。それもできるだけ数多くの具体的な作品に接した上で。

このささやかなノートがそのための標の一つとなれば幸い。

あなたは、１から１００００までの数字を自らの手で紙に書き連ねることができますか。そんな無意味なことはできない？

論理記号 $\forall, \exists$ を含む命題とその否定について復習しておきましょう。

## 2　実数の連続性

実数からなる集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して、実数 $a$ が $A$ の**上界**（じょうかい、upper bound）であるとは、

$$A \subset (-\infty, a]$$

であること。また、**下界**（「かかい」と読むらしい、lower bound）であるとは、

$$A \subset [a, +\infty)$$

となること。上界、下界ともに存在するとき、集合 $A$ は**有界** (bounded) であるという。これは言い換えると、$A$ が有限閉区間に含まれるということである。

**例 2.1.** 自然数の集合 $\mathbb{N}$ は下界を持つが、上界は存在しない。整数の集合 $\mathbb{Z}$ は、上界も下界ももたない。有限区間 $[a, b]$ などは、有界。

実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は、その像 $\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\}$ が有界のとき、**有界関数**であるという。関数 $f$ が有界であることを形式的に表現すれば、

$$\exists M > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq M$$

となる。

**問 1.** 上の条件を日本語で読み下せ。また英語で読み下したらどうなるか。

実数には**連続性** (continuity) と称される重要な性質がある。この連続性にはいくつかの同値な言い換えがあるが、ここでは次の性質に着目する。

**区間縮小法の原理**（空でない）閉区間の減少列 $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$ で、区間の幅 $|I_n|$ が 0 に近づくものの共通集合は、一つの実数からなる。$\{c\} = \cap_n I_n$ とおけば、

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

である。

**命題 2.2.** 上に（下に）有界な集合 $A$ は最小の上界（最大の下界）をもつ。さらに最小上界（最大下界）は、$A$ から選んだ数列の極限として表わされる。

*Proof.* $A$ の要素 $a_1$ および $A$ の上界のひとつ $b_1$ を勝手に選びその中点を $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ とする。区間 $[c_1, b_1]$ に含まれる $A$ の点が存在するときは、そのような点をひとつ取ってきて $a_2$ と名づけ $b_2 = b_1$ とおく。もし、区間 $[c_1, b_1]$ と $A$ が共通部分を持たないときは、$c_1$ が $A$ の上界になるので、

$a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ とおく。以下、この操作を繰り返すと、$A$ の要素の単調増大列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ と $A$ の上界からなる単調減小列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を取りだすことができ、さらに、作り方から、$|b_n - a_n| \leq |b_{n-1} - a_{n-1}|/2$ であるので、区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ は区間縮小法の条件をみたす。したがって、実数 $c$ を

$$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$$

によって定めることができる。

まず、$c$ は $A$ の上界である。というのは、$a \in A$ に対して、$b_n$ は $A$ の上界であることから、$a \leq b_n$ が任意の $n$ について成り立ち、したがってその極限として $a \leq c$ が成り立つ。

次に、$c$ は $A$ の上界の中で最小のものであること。$A$ の上界 $b$ を勝手に取るとき、$a_n \leq b$ がすべての $n$ に対して成り立つので、やはり極限を取って、$c \leq b$ となるからである。 □

上の証明方法は、B. Bolzano によるもので、ここでは**無限部屋割り論法**と呼ぶことにする。さらに、この証明方法をなぞれば、次のこともわかる。

**系 2.3.** 単調増加（あるいは単調減少）数列は、上界（下界）をもてば、収束する。

*Remark* . 本来の部屋割り論法は次のようなものである。$n+1$ 個の互いに異なる自然数があれば、その中から 2 つ選んできて、その差が $n$ で割り切れるようにできる。

**問 2.** 上の系の性質から区間縮小法の原理を導け。

上に有界な実数の集合 $A$ に対して、その最小の上界を $A$ の**上限** (supremum) とよんで、$\sup A$ と書く。上界をもたない（実数の）集合 $A$ に対しては、$\sup A = +\infty$ といった書き方をする。

同様に、下に有界な実数の集合 $A$ に対して、その最大の下界を**下限** (infimum) とよんで、記号 $\inf A$ で表す。(superior, inferior, inferno, infinite)

**例 2.4.**

(i) 集合 $A = \{1/n; n = 1, 2, \dots\}$ に対して、

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = 0.$$

(ii) 開区間 $A = (a, b)$, $a < b$, に対して、

$$\sup A = b, \qquad \inf A = a.$$

**問 3.** 集合 $\{\cos(\pi/n); n = 3, 4, 5, \dots\}$ の上限と下限を求めよ。

**問 4.** 空集合 $\emptyset$ に対しては、$\sup\emptyset$, $\inf\emptyset$ をどう定義するのが合理的か。ヒント：$A \subset B$ であれば、$\sup A \le \sup B$、$\inf A \ge \inf B$ が期待される。

実数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ に対して、$b_n = \inf\{a_k; k \ge n\}$, $c_n = \sup\{a_k; k \ge n\}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は単調増加であり、数列 $\{c_n\}$ は単調減少である（何故か）。数列 $\{b_n\}$ の極限値を元の数列 $\{a_n\}$ の**下極限** (lim inf)、数列 $\{c_n\}$ の極限値を $\{a_n\}$ の**上極限** (lim sup) と言って、それぞれ

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n$$

という記号で表す。$b_n \le c_n$ であるから、その極限値として、

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$

であることに注意。

**例 2.5.** 数列 $\{(-1)^n + 1/n\}_{n\ge1}$ の上極限と下極限を求めてみよう。

**定理 2.6.** 実数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ に対して次は同値。

(i) $\{a_n\}_{n\ge1}$ は、収束する。

(ii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ である。

(iii) $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$ である。

*Proof.* (iii) ⇒ (ii): $b_n = \inf\{a_k; k \ge n\}$, $c_n = \sup\{a_k; k \ge n\}$ とおくと、$b_N$, $c_N$ は、数列 $\{a_N, a_{N+1}, \dots\}$ の部分列の極限だから、

$$0 \le c_N - b_N \le \sup\{|a_m - a_n|; m, n \ge N\} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

(ii) ⇒ (i): 仮定により、$\lim b_n = \lim_n c_n$ であるから、

$$\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subset [b_n, c_n]$$

の右辺に区間縮小法を適用すると、数列 $\{a_n\}$ はひとつの実数に近づくことがわかる。

(i) ⇒ (iii): $\lim_n a_n = a$ とすると、

$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| \to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty.$$

□

上の定理の (iii) の条件をみたす実数列を**コーシー列** (Cauchy sequence) とよぶ。収束先の情報を使わずに、数列の収束性を判定できるので、理論的に重要である。フランスの数学者 A. L. Cauchy に因む。

**定理 2.7 (Bolzano).** 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の中から収束する部分列を取り出すことができる。

*Proof.* これも無限部屋割論法により、Cauchy 列を取り出す。無限個含む箱を選び出して行く。 □

**例 2.8.** 上の定理で有界性の仮定は必要である。たとえば、$\{n\}_{n\geq 1}$ の部分列は、すべて発散する。

*Remark .* Bernard Bolzano (1781–1848) プラハ、ボヘミア（当時、現チェコ）の数学者。解析学の基礎の確立に貢献する。1817 年頃には完成していた。しかしながら、広く知れ渡るのは死後のことであった。コーシー列の概念もコーシーに先立って発見していた。

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) パリ、フランスの数学者。多方面の数学に貢献。とくに解析学の基礎と応用。生涯論文数７８９。微積分の教科書である「解析学教程」(1821) にて厳密な微積分を展開。シャルル１０世の亡命に随行して、1833 プラハにて Bolzano と邂逅。関数の連続性についての Bolzano の研究を知る。

**問 5.** 数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

の中から収束する部分列を色々取り出してみよ。

また勝手に選んだ実数 $a$ $(0 \leq a \leq 1)$ に対して、$a$ に収束する部分列を選ぶことができる。

**実数の構成**：有理数の集合 $\mathbb{Q}$ から実数の集合を作る方法の一つとしてコーシー列を利用するものがある。有理数からなるコーシー列の作る集合を $R$ とし、集合 $R$ における同値関係を

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \sim \{b_n\}_{n\geq 1} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

と定める。ただし、右辺の極限の意味は、

$$0 < \forall\epsilon \in \mathbb{Q}, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, |a_n - b_n| \leq \epsilon$$

であるとする。上の収束列の特徴づけから、この同値関係による同値類を実数と同定することができるので、あとはこれに基づいて実数のすべての性質を確かめれば良い。しかしながら、これは退屈でしかも煩雑な作業となる。たとえば、実数列の収束性を示すためには、有理数列の列とその同値類の関係を問題にすることになるなど。

**問 6.** 上で構成した「実数」に対して四則演算を定義してみよ。

## 3　定積分の定義

最初に、ギリシャ文字についての講釈。$\Delta, \delta, \xi$ と $\sum$ の使い方。

閉区間 $[a,b]$ の上で定義された関数 $f(x)$ の定積分の定義の復習。区間の分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ と分割の細かさ $|\Delta| = \max\{x_j - x_{j-1}; 1 \leq j \leq n\}$。分割の代表点 $\xi = \{\xi_j\}_{1\leq j\leq n}$ と積和（リーマン和と呼ばれる）

$$S(\Delta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

$|\Delta| \to 0$ でありさえすれば、分割の仕方および代表点 $\xi$ の選び方に無関係に、積和 $S(\Delta,\xi)$ が一定の値に近づくとき、その近づく先の値（極限値）を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書いて、関数 $f$ の区間 $[a,b]$ における**定積分** (definite integral) と呼ぶ。

関数 $f$ が連続であるとき、Cauchy は次のように考えて、その定積分が「存在する」と結論した。分割の列 $\{\Delta_k\}_{k\geq 1}$ を、各 $\Delta_k$ が $\Delta_{k-1}$ の細分割でしかも $|\Delta_k| \to 0$ $(k \to \infty)$ あるようにとるとき、数列 $\{S_k = S(\Delta_k, \xi^{(k)})\}$ がコーシー列であればよい。そのためには、和 $S_l$ の項をより粗い分割 $\Delta_k$ $(k < l)$ でくくり直せば、

$$f(\xi)(y-x), \qquad \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

の比較が問題である。

これを調べるために、$\delta > 0$ に対して、

$$M(\delta) = \sup\{|f(s) - f(t)|; |s-t| \leq \delta\}$$

なる量を導入する。これを使えば、

$$\begin{aligned}
\left| f(\xi)(y-x) - \sum_j f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| &= \left| \sum_j (f(\xi) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&\leq \sum_j |f(\xi) - f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq M(\delta) \sum_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= M(\delta)(y-x),
\end{aligned}$$

ただし $\delta = |\Delta_k|$, となるので、さらに和をとって、

$$\left| S(\Delta_k, \xi^{(k)}) - S(\Delta_l, \xi^{(l)}) \right| \leq M(|\Delta_k|)(b-a), \quad k \leq l$$

を得る。

**問 7.** 二つの分割 $\Delta'$, $\Delta''$ と代表点の列 $\xi'$, $\xi''$ に対して、$\delta = \max(|\Delta'|, |\Delta''|)$ とおくと、

$$|S(\Delta', \xi') - S(\Delta'', \xi'')| \leq 2M(\delta)(b-a)$$

である。これを示せ。

**命題 3.1.** 関数 $f$ が、$M(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ という性質をみたせば、すなわち

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x) - f(y)|; |x-y| \leq \delta\} = 0$$

であれば、定積分

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

が存在する。

ここで、上の条件が関数 $f$ の連続性、

$$y \to x \quad \Rightarrow \quad f(y) \to f(x)$$

から即座に導かれるわけではないことに注意しよう。

この二つの条件は、言葉で曖昧に表現すれば、

$x$ と $y$ が近ければ、$f(x)$ と $f(y)$ も近い

となるので、うっかりしそうな所ではあるが、後ほど見るように論理記号を使って正確に表現すれば、積分の存在を保証する連続性（一様連続性という）の方が、単なる（各点での）連続性よりも強い条件であることがわかる。

実は、関数の定義域が有限閉区間であるときには、この弱い方の連続性から、強い連続性を導くことが可能である。しかしながら、そのためには、関数の連続性やその定義の前提となる数列の収束について、その意味を改めて問い直さないといけない。この辺の事情を Bolzano-Weierstrass に従い、以下で詳しくみていこう。

# 4　極限と連続性

数列および関数の極限については既に「素朴に」使ってきたのであるが、その正確な意味を遅ればせながら調べてみよう。

極限操作の正確な表現。

数列の極限、防衛ラインと敵の侵略ゲーム。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon.$$

読み下し文：正数 $\epsilon$ をどのように選ぼうとも、ある自然数 $N$ を取ってくると、$N$ 以上のすべての自然数 $n$ に対して不等式 $|a_n - a| \leq \epsilon$ が成り立つ。

*Remark* . コーシー列であることの正確な定義は、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |a_m - a_n| \leq \epsilon.$$

**例 4.1.** 実数の集合 $A$ に対する条件

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, |a| \leq \epsilon$$

は、「どんなに小さな正数 $\epsilon$ を選んでも $|a| \leq \epsilon$ となる要素 $a \in A$ を取ってくることができる」と読み下すことができる。どこから「小さな」という限定詞が出てくるかというと、結論の不等式の向き（性質）に理由がある。条件の後半部分を

$$P(\epsilon) = 「\exists a \in A, |a| \leq \epsilon」$$

と表記すれば、$\epsilon \leq \epsilon'$ である限り、

$$P(\epsilon) \Longrightarrow P(\epsilon')$$

が成り立つ。

したがって、$\forall \epsilon > 0, P(\epsilon)$ という条件は、$\epsilon > 0$ が小さいところで成り立つかどうかが実質的な内容となる。このことから、どんなに小さい $\epsilon > 0$ を選んでも云々という「意訳」が許されることになる。

*Remark* . 上の条件は、$\epsilon$ のかわりに別の文字を使って、

$$\forall M > 0, \exists a \in A, |a| \leq M$$

と書いても同じ内容を表すことに注意。（束縛変数と積分変数との類似性。）

**問 8.** 実数の集合 $A$ に対する条件

$$\forall M > 0, \exists a \in A, a \geq M$$

を上の例に倣って「意訳」してみよ。

**問 9.** 数列の収束性の定義で、$\forall \epsilon > 0$ の部分は、「どんなに**小さい** $\epsilon > 0$ を取ってきても」と読み下すことができる。その理由は？

**問 10.** 数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束するということは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| \leq 2\epsilon.$$

と書いてもよい。あるいは最後の $2\epsilon$ の 2 を任意の (ただし $\epsilon$ などとは無関係な）正数で置き換えても同じ内容（命題として同じ主張）である。これを確かめよ。

**例 4.2 (Cesaro mean).**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

*Proof.* どんなに小さく $\epsilon > 0$ を選んだとしても、自然数 $N$ を大きくとれば、

$$\forall n \geq N, |a_n - a| \leq \epsilon$$

となる。このとき、$n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \frac{1}{n}\left(|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|\right) \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{n} + \epsilon\end{aligned}$$

となる。そこで、自然数 $N' \geq N$ をさらに大きくとって、

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_N - Na|}{N'} \leq \epsilon$$

となるようにしておけば、$n \geq N'$ に対しては

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leq 2\epsilon$$

となる。 □

**問 11.** 数列 $\{a_n > 0\}$ が $a \geq 0$ に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$$

である。

**問 12 (Cauchy).** 階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が収束すれば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

である。具体例として、$\log(n+1) - \log n = \log(n + 1/n) \to 0$ から、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

が従う。

**問 13.** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であれば、

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

**命題 4.3.** 関数 $f(x)$ に対して、次は同値。

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii): (ii) を否定すると、

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, |x-a| \le \delta, |f(x)-f(a)| > \epsilon.$$

そこで、$\delta = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) と選ぶと、$\exists x = a_n$,

$$|a_n - a| \le \frac{1}{n}, \quad |f(a_n) - f(a)| > \epsilon.$$

これは

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) \ne f(a)$$

ということだから、(i) が成り立たない。

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を仮定すると、

$$\forall \delta > 0, \exists N, \forall n \ge N, |a_n - a| \le \delta$$

となる。そこで、$\forall \epsilon > 0$, (ii) で存在が保証されている $\delta > 0$ をとり、この $\delta$ に対して、上の条件をみたす $N$ を選んでおけば、$\forall n \ge N$,

$$|a_n - a| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - f(a)| \le \epsilon$$

となって、これは $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ を意味する。 □

**定義 4.4.** 上の同値な条件をみたすとき、関数 $f$ は $x = a$ で**連続である** (continuous) という。定義域に属するすべての $a$ で連続であるとき、$f$ は連続であるという。

*Remark .* 上の命題の後半で述べた条件が、いわゆる epsilon-delta 論法と呼ばれるもので、高等数学を学ぶ世界中の若者を苦しめてきた（？）悪名高いものである。Weierstrass が先人の成果を集大成した講義行い、それを聞いた Weierstrass の弟子たちによって、世界中に伝播していった。

**例 4.5.** 関数 $f(x)$ が $x = c$ で微分可能であるという性質を epsilon-delta 式に述べると、

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, 0 < |x-c| \le \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - A \right| \le \epsilon$$

となる。 実数 $A$ は、$f$ と $c$ だけで決まり、微分係数と呼ばれ $f'(c)$ という記号で表されることは周知の通り。

**問 14.** 微分係数は、一意的に定まることを確かめよ。

**命題 4.6.** 区間 $[a, b]$ の上で定義された関数 $f(x)$ が $x = c$ ($a < c < b$) で微分可能であれば、$f$ は $x = c$ で連続である。

**Cantor 集合と Cantor 関数**

区間 $[0,1]$ 内の実数を三進展開して

$$[0.c_1c_2\dots]_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{3^j}$$

と表す。ここで数列 $\{c_j\}_{j\geq 1}$ は、$c_j \in \{0,1,2\}$。第一のステップで、$[0,1]$ から、開区間 $([0.1]_3, [0.2]_3)$（これは、$[0,1]$ を三等分した中央の部分）を除く。次に残った 2 つの区間をそれぞれ三等分しやはり中央部分の開区間

$$([0.01]_3, [0.02]_3), \qquad ([0.21]_3, [0.22]_3)$$

を除く。以下、これを繰り返し、$n$ ステップ目では、幅 $3^{-n}$ の $2^{n-1}$ 個の開区間を取り除くと、結局残るのは、

$$[0.c_1c_2\dots]_3, \qquad c_j \in \{0,2\}$$

の形の実数全体 $C$ となる。この残った部分を Cantor 集合とよぶ。これの「個数」は、$2^{\mathbb{N}}$ だけあるので、実数の「個数」と等しい。一方、取り除く区間の長さの総和は、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = 1$$

となって、Cantor 集合の「長さ」は零であることがわかる。

三進展開を利用して、この Cantor 集合の上だけで「増加」する閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 (Cantor function、別名 the devil's staircase) を作ってみよう。三進実数 $c = [0.c_1c_2\dots]_3$ に対して、二進実数 $f(c)$ を次のように定める。$c \notin C$ のときには、$n \geq 0$ を「$c_j \neq 1$ for $j \leq n$ and $c_{n+1} = 1$」であるように選び、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_n}{2}1\right]_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

とおく。$c \in C$ のときには、$c_j \neq 1$ for $j \geq 1$ に注意して、

$$f(c) = \left[0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\right]_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{2^{j+1}}$$

とおく。そうすると、(i) $f$ は単調増加連続関数で、(ii) $[0,1] \setminus C$ の上では微分可能で、$f'(x) = 0$ である。（連続な階段関数）

かくの如く連続関数とは面妖なものである。と同時に、次節で見るように都合の良いものでもある。

# 5　定積分の存在

道具が整ったので、連続関数に対して定積分が存在することを示そう。最初に、ウォーミングアップとして、

**例 5.1.** 正の数 $\delta$ に依存して決まる実数 $M(\delta)$ に対して、

$$\lim_{\delta \to 0} M(\delta) = 0$$

という主張の否定（命題）は、

$$\exists\, \epsilon > 0, \forall \delta > 0, |M(\delta)| \geq \epsilon.$$

**補題 5.2 (一様連続性, uniform continuity).** 有界閉区間 $[a, b]$ の上で定義された連続関数 $f$ に対して、

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta\} = 0.$$

*Proof.* 仮に上の補題が成り立たないとすると、

$$\exists\, \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, x(\delta), y(\delta), |x - y| \leq \delta, |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

$\delta$ として $1/n$ を取ってきたときの $x(\delta)$, $y(\delta)$ を $x_n$, $y_n$ で表せば、

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

である。Bolzano の定理により、$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j \geq 1}$ で収束するものを取ってきて、$c = \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$ とすると、$\lim_{j \to \infty}(x_{n_j} - y_{n_j}) = 0$ より $lim_{j \to \infty} y_{n_j} = c$ でもある。また、$a \leq x_{n_j} \leq b$ の極限として $c \in [a, b]$ にも注意。

$$\epsilon \leq |f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \leq |f(x_{n_j}) - f(c)| + |f(y_{n_j}) - f(c)| \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

となって矛盾である。最後の極限では、関数 $f(x)$ の $x = c$ での連続性を使った。 $\square$

**定理 5.3.** 閉区間 $[a, b]$ の上で定義された連続関数 $f$ に対して、その積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

が存在する。

**問 15.** 各点連続性と一様連続性を論理記号を使って表せば次のようになる。

$$\forall \epsilon > 0, \forall x, \exists\, \delta > 0, \forall y, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x, \forall y, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

極限の線型性と正値性から定積分の線型性と正値性が従う。分割積分の公式と積分の基本不等式。

**定理 5.4 (積分微分の公式).** 連続関数 $f$ に対して、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad a < x < b$$

が成り立つ。

**問 16.** 連続性の定義と積分の基本不等式を使って、積分微分の公式を証明せよ。

*Remark .* 上の問と導関数が恒等的に零であるものは定数関数に限るという事実（後の系参照）から、$f'(t)$ が連続関数であれば

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

という見なれた公式に帰着するが、単に $f'(t)$ があるというだけでは、そもそもこの積分の存在すら覚束ない。

それにも関らず、$M = \sup\{|f'(t)|; a < t < b\}$ とすると、

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \qquad x, y \in (a, b)$$

が成り立つ（有限増分の公式）ことが無限部屋割り論法によりわかる。

**例 5.5.** 実数全体で定義された関数

$$f(x) = x^2 \sin(1/x)$$

について考える。ただし、$f(0) = 0$ と定める。微分を計算すると $f'(0) = 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

となって、導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続であるが、リーマン積分可能である。

**問 17.** 上の例で、$f'(0) = 0$ であることを確かめよ。

*Remark .* 有界区間の上で定義された有界関数 $f$ がリーマン積分可能であるための必要十分条件は、$f$ の不連続点全体の集合の「長さ」が 0 となることである (Lebesgue の判定条件)。

# 6　連続性の諸相

無限部屋割り論法と Bolzano の定理から微積分の基礎定理が導かれる。

**定理 6.1.** 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数に対しては、最大値・最小値がともに存在する。

*Proof.* Bolzano の定理による。 □

**問 18.** 閉区間、連続性のどちらか一方でも欠けると、上の定理は成立しないことを確かめよ。

最大値あるいは最小値の存在が保証されているときに、実際にその値を求めるためには次のフェルマーの方法を試みることになる。

**命題 6.2.** 関数 $f(t)$ が $t = c$ $(a < c < b)$ で最大値（または最小値）をとり、かつ $t = c$ で微分可能であれば、$f'(c) = 0$.

*Proof.* （十分小さい）$h > 0$ に対して、不等式

$$f(c \pm h) - f(c) \leq 0$$

を $h$ で割って、極限 $h \to 0$ を取ると、

$$\pm f'(c) \leq 0$$

が得られる。 □

**命題 6.3 (平均値定理).** 閉区間 $[a, b]$ の上で連続な関数 $f$ が開区間 $(a, b)$ で微分可能であれば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる実数 $a < c < b$ が存在する。

*Proof.* 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線と関数 $f$ を比較して、

$$F(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a) - f(t), \quad a < t < b$$

と置くと、連続関数 $F(t)$ は、$F(a) = 0 = F(b)$ をみたすので、開区間 $(a, b)$ 内のある点 $c$ で最大値または最小値を取る。上の定理を適用すると、

$$F'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) = 0$$

となってめでたい。 □

**系 6.4.** 開区間 $(a, b)$ の上で定義された関数 $f$ が微分可能で、$f'(t) = 0$, $a < t < b$ であるならば、$f$ は定数関数である。換言すれば、原始関数は定数を除いて一意的に定まる。

**定理 6.5 (微分積分の公式).** 関数 $f$ が $[a, b]$ で微分可能であり、その導関数 $f'$ が、$[a, b]$ で連続であれば、

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

**定理 6.6 (中間値定理、Intermediate Value Theorem).** 有界閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 $f$ の最大値・最小値をそれぞれ $M$, $m$ で表わすとき、

$$\{f(t); t \in [a,b]\} = [m, M]$$

が成り立つ。

*Proof.* 最大値・最小値を与える点の座標を改めて $a, b$ と取り直して、$(M,m) = (f(a), f(b))$ または $(M,m) = (f(b), f(a))$ と仮定してよい。どちらでも本質的な違いはないので、$f(a) = m, f(b) = M$ とする。

一般に、2つの実数 $\alpha, \beta$ に対して $[\alpha, \beta]$ または $[\beta, \alpha]$ に含まれる実数を $\alpha, \beta$ の中間点と呼ぶことにする。

さて、勝手に選んだ $\mu \in [m, M]$ に対して、区間 $[a,b]$ を二等分して、$[a,c]$, $[c,b]$ を考えると、$\mu$ は $(f(a), f(c))$ または $(f(c), f(b))$ の中間点である。そこで、中間点になっている方の区間を $[s_1, t_1]$ と名付け、さらに $[s_1, t_1]$ を二等分して、この議論を続けると、実数列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ で、

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots < \cdots \leq t_2 \leq t_1, \qquad t_n - s_n = \frac{t_1 - s_1}{2^{n-1}}$$

であり、$\mu$ が $f(s_n), f(t_n)$ の中間点となっているものが存在する。区間縮小法の原理より、

$$s_\infty = \lim_n s_n, \qquad t_\infty = \lim_n t_n$$

が存在して一致する。一方、$\mu$ が $f(s_n)$, $f(t_n)$ の中間点であることから、

$$|f(t_n) - \mu| \leq |f(t_n) - f(s_n)| \leq |f(t_n) - f(t_\infty)| + |f(s_\infty) - f(s_n)|$$

であり、極限を取って、$f$ の連続性を使えば、

$$\mu = f(t_\infty)$$

であることがわかる。 □

**例 6.7.** 区間 $[a,b]$ の上で定義された連続関数 $f$ が、$f(a)f(b) < 0$ を満たせば、$f(x) = 0$ となる $x \in (a,b)$ が存在する。

**問 19.** 奇数次の多項式関数 $y = f(x)$ に対して、$f(x) = 0$ となる実数 $x$ が必ず存在する。

**問 20.** 区間 $[0,1]$ の上で定義された連続関数 $f$ が、$0 \leq f(x) \leq 1$ $(0 \leq x \leq 1)$ をみたすとき、$f(x) = x$ となる $x \in [0,1]$ の存在を示せ。

**問 21.** 区間 $[0,1]$ の上で定義された連続関数 $f$ が、$f(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$ をみたすとき、十分大きな $M > 0$ に対して、$f(x) = Mx$ は解をもつ。

# 7　級数の収束性

　実数列 $\{a_n\}$ に対して、その形式的な和 $\sum a_n$ を**級数**(series) と呼び、極限値

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

が存在するとき、級数は**収束する**(convergent) と言い、その値を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と書く。ちなみに、（数）列は、sequence という。実数列は a sequence of real numbers かな。

**命題 7.1.** 級数 $\sum a_n$ が収束すれば、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

である。

**例 7.2.** $a_n \to 0$ でも、級数 $\sum a_n$ は発散することがある。正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$$

とおくと、

$$\zeta(\alpha) < +\infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

　上の発散級数についてもう少し詳しく調べておこう。この級数の発散のスピードは、

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n}\frac{1}{x}dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n} = 1.$$

さらに、

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \int_k^{k+1}\frac{x-k}{kx}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{kx}dx \leq \frac{1}{k^2}$$

より、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log n\right)$$

が存在する。これをオイラー定数 (Euler constant) と称する。

**問 22.** $1/2 < \gamma < 1$ を示せ。詳しく計算すると、$\gamma = 0.55721\dots$ であるが、これが無理数かどうかは現在もわかっていない。

**補題 7.3.** 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が、

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

を満たせば、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

である。

**命題 7.4 (Leibnitz).** 単調減少正数列 $\{a_n\}$ が $a_n \to 0$ をみたせば、それから作られる交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

は収束する。

**例 7.5.**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \quad \text{(N. Mercator, 1668)}.$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{(G.W. Leibniz, 1682)}.$$

**補題 7.6.** 正数和 $\sum_{n\geq 1} a_n$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n\in F} a_n ; F \text{ は } \mathbb{N} \text{ の有限部分集合} \right\}$$

である。

*Proof.* 左辺の値（極限）を $a$、右辺の上限を $A$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n\in F} a_n \leq a$ から、$A \leq a$ がわかる。

一方、$\forall \epsilon > 0, \exists N,$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n - a \right| \leq \epsilon$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \geq a - \epsilon$$

となり、したがって $A \geq a - \epsilon$ が成り立つ。$\epsilon$ としては勝手な正数を選べるので、これは、$A \geq a$ を意味する。

以上により、$A = a$ である。 □

**問 23.** 上の証明では、$a < +\infty$ を暗黙に仮定した。$a = +\infty$ の場合の議論を補って、証明を完成させよ。

**系 7.7.** 正数和の値は、和をとる順序によらない。自然数を自然数に移す全単射 $\phi$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**定義 7.8.** 級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ は、

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$$

であるとき、**絶対収束する** (absolutely convergent) という。

**例 7.9.** (i) 任意の実数 $x$ に対して、

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \end{aligned}$$

は絶対収束。

(ii) 実数 $|x| < 1$ と任意の実数 $a$ に対して、

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots, \\ (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots \end{aligned}$$

は絶対収束。

**定理 7.10 (級数の基本定理).** 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_n a_n$$

は収束し、その値は和をとる順序によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$$

が成り立つ。

*Proof.* まず、

$$a_n = b_n - c_n, \quad b_n \geq 0, \quad c_n \geq 0, \quad |a_n| = b_n + c_n$$

とわけて考えると、絶対収束性から

$$\sum_n b_n \qquad と \qquad \sum_n c_n$$

が共に存在し、

$$\sum_n a_n = \sum_n b_n - \sum_n c_n$$

となる。正数の和については、加える順序によらないので、この関係式から、$\{a_n\}$ の和も順序によらない。 □

*Remark .* 収束はするが絶対収束しない級数をとくに強調して「条件収束する」(conditionally convergent) という言い方をすることが多い。

もうすこし一般的に、実数の集団 $\{a_i\}_{i\in I}$ に対して、

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sup\left\{\sum_{i\in F} |a_i|; F \text{ は } I \text{ の有限部分集合}\right\}$$

とおく。$\displaystyle\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$ （総和可能、summable という）ならば和 $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i \in \mathbb{R}$ が意味をもち、

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|.$$

**命題 7.11.** 総和可能な実数の集団 $\{a_i\}_{i\in I}$ と添え字集合 $I$ の分割和 $I = \displaystyle\bigsqcup_{n\geq 1} I_n$ に対して、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$$

が成り立つ。

**例 7.12.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$$

のとき、

$$I = \{i = (m,n); m \geq 1, n \geq 1\}, \qquad c_i = a_m b_n$$

と定めると、$\displaystyle\sum_{i\in I} |c_i| < +\infty$ であり、

$$\sum_{i\in I} c_i = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n\geq 1} a_m b_n$$

と書く。

**問 24.** $\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$ であれば、$I$ の可算部分集合 $C$ が存在して、$a_i = 0$ for $i \notin C$ となる。とくに、和 $\sum_{i\in I} a_i$ は級数によるものと実質的に同じである。

以上のようなことは、実際のところ冪級数の扱いで必要になるので、そういったものが未経験（あるいは経験不足）の段階でこれ以上しつこくやってもしようがないかもしれない。冪級数の計算がどういった形で上の一般法則に結びつくか、ひとつだけ具体例を挙げておこう。詳しくは「複素級数」の授業を参照。

**例 7.13.** $|x|<1, |y|<1$ であるとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x+y-xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

が成り立つ。

数列

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \ldots$$

は絶対収束しないが、級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

自体の値は存在する。

和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子をみてみよう。そのために、$+$ の項を $p$ 個、$-$ の項を $q$ 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを $n$ ブロック足した和

$$\begin{aligned}1 &+ \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} + \ldots \\ &+ \frac{1}{2(n-1)p+1} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \cdots - \frac{1}{2nq}\end{aligned} \tag{1}$$

すなわち、

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right)$$

を考えると、これは、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2np} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{qn}\right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

を使うと、

$$\log(2pn) + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}(\log(pn) + \gamma_{pn}) - \frac{1}{2}(\log(qn) + \gamma_{qn})$$

$$= \log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn}$$

となって、これは、$n \to \infty$ のとき、

$$\log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q = \log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

**例 7.14.**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2.$$

実は、$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (より一般に条件収束級数) を並べ替えて、任意の与えられた実数に等しくなるようにすることができる (リーマン)。

**問 25 (Challenging).** 上で述べたリーマンの結果を確かめよ。
ヒント：与えられた実数 $A$ に対して、正の項を加えて $A$ より大きくする。次に負の項を加えていき $A$ よりも小さくする。以下これを交互に繰り返していけば求める配列が得られる。

無限和（級数）と同様の発想で、無限積 (infinite product) についても考えることができる。すなわち、与えられた数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ で零を項に含まないものに対して、極限

$$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n$$

が存在し零でないとき、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束すると言い、その値も同じ記号で表す。

**問 26.** 無限積が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である。

**命題 7.15.** 次は同値。

(i) 級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$$
は絶対収束する。

(ii) 級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$$
は絶対収束する。

*Proof.* どちらの条件からも、$\lim_n a_n = 1$ が出てくるので、この仮定の下で同値性を示せばよい。$a_n = 1 + t_n$ と表示すれば、

$$\log(1 + t_n) = t_n - \frac{1}{2}t_n^2 + \ldots$$

であるから $\lim_n t_n = 0$ に注意すれば、十分大きい $n$ に対して、

$$\frac{1}{2}|t_n| \le |\log(1+t_n)| \le 2|t_n|$$

が成り立つ。したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+t_n)| < +\infty$$

である。 □

上の同値な条件をみたすとき、無限積は絶対収束するという。このとき、

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n\right)$$

であるので、絶対収束する無限積の値は、積を取る順序によらない。

**問 27.** 無限積

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1-n^{-s})^{-1}$$

は $s > 1$ に対して絶対収束する。

**問 28 (Challenging).** ゼータ関数の Euler による表示式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\ \text{prime}} (1-p^{-s})^{-1}, \qquad s > 1$$

を示せ。 ヒント：

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

を使う。

## 8　一様収束とは

ここでは関数列の収束について、その基本を学ぶ。とくに連続関数列の極限関数がいつ連続になるかについての十分条件を Weierstrass の与えた筋道にしたがってたどってみる。

歴史的には、連続関数列の極限は連続であるという Cauchy の主張の間違いを Abel が指摘したことに端を発する問題である。

関数列 $\{f_n\}$ が関数 $f$ に**各点収束する**(pointwise convergent)（あるいは単に収束する）とは、すべての $t$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

となること。関数列の形式和（級数）$\sum_n f_n$ が（各点）収束するとは、すべての $t$ に対して、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

が収束すること。このとき、

$$f(t) = \sum_n f_n(t)$$

で定められる関数 $f$ も $\sum_n f_n$ と書いて、関数列の和と呼ぶ。

**例 8.1.** $f_n(t) = t^n$ $(t \in [0,1])$ とおくと、

$$\lim_n f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{if } t = 1 \end{cases}$$

である。各 $f_n$ は連続関数であるが、その極限関数は、$t = 1$ で不連続になる。

有界関数 $f$ に対して、

$$\|f\| = \sup\{|f(t)|; t \in [a,b]\}$$

とおく。

関数列 $\{f_n\}$ と関数 $f$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

であるとき、$f_n$ は $f$ に**一様収束する**(uniformly convergent) という。関数和の一様収束についても同様。

**例 8.2.** 一様収束性の幾何学的意味。

**問 29.** 各点収束、一様収束の条件を epsilon-delta 方式で述べて、違いを認識する。

**定理 8.3 (Weierstrass).** 連続関数列が一様収束すれば、その極限関数は連続である。

*Proof.* 関数 $f$ の $t = c$ での連続性について考える。

$$\begin{aligned} |f(t) - f(c)| &\leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &\leq 2\|f_n - f\| + \|f_n(t) - f_n(c)\| \end{aligned}$$

であるので、$\forall\epsilon > 0$, まず $n$ を十分大きく取って $\|f_n - f\| \leq \epsilon$ とし、次に $f_n$ の連続性を使って、$\delta > 0$ を「$|t-c| \leq \delta$ ならば $|f_n(t) - f_n(c)| \leq \epsilon$」であるように選べば、

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, |t - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(t) - f(c)| \leq 3\epsilon$$

となって、$f$ の連続性がわかる。 □

**系 8.4.** 連続関数の一様収束和は連続関数となる。

**命題 8.5.** 関数列 $\{f_n\}$ と正数列 $\{M_n\}$ があり、

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t, \quad |f_n(t)| \leq M_n, \qquad \sum_n M_n < +\infty$$

を満たせば、関数和 $\sum_n f_n$ は一様収束し、

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

が成り立つ。

*Proof.* 各 $t$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

であるから、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ は絶対収束する。その値を $f(t)$ で表わせば、

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

である。最後の和は $t$ に無関係であるから、

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

となって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様収束であることがわかる。 □

**例 8.6.** (i)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

は任意の有限区間上で一様収束する。

(ii)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$$

は、開区間に含まれる任意の閉区間上で一様収束する。

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

は実数直線 $\mathbb{R}$ 上で一様収束する。

**問 30.** (i) で定義域を $\mathbb{R}$ とした場合、(ii) で定義域を $(-1, 1)$ とした場合について調べる。

**定理 8.7.** 連続関数列 $\{f_n\}$ が（連続）関数 $f$ に一様収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

である。

*Proof.*

$$\left|\int_a^b (f_n(t)-f(t))\,dt\right| \le \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \le (b-a)\|f_n - f\| \to 0.$$

□

**系 8.8.** 連続関数の一様収束和 $\sum_n f_n(t)$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt.$$

**問 31.** 関数列 $\{f_n(x)\}$ について、各 $f_n(x)$ の導関数 $f_n'(x)$ が存在して連続関数となり、関数和 $\sum_n f_n'(x)$ が一様収束すれば、

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

である。

以上の結果は、理屈よりもまずその使い方を学んだ方が良いだろう。例えば、

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

を積分して、

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots.$$

これに、$x=1$ を代入すると、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

最初の計算は、一様収束の定理により正当化されるが、$x=1$ を代入することを保障するためには別の工夫が必要である。こういった様々な具体例を知った上でなければ、問題の所在そのものがわからないであろう。

**例 8.9.** 連続関数列 $f_n$ を、

$$f_n(t) = \begin{cases} 4n^2 t & \text{if } 0 \le t \le 1/2n, \\ 4n - 4n^2 t & \text{if } 1/2n \le t \le 1/n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めると、その極限関数は 0 であり、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

となる。とくに、一様収束にはならない。

**問 32.** (i) 上のことを確かめよ。

(ii) また、関数列 $f_n(t)$ として、場合分けが必要でない形のもの（一つの式で表されるもの）を作れ。