

行列代数これだけ

山上 滋

平成 14 年 12 月 21 日

これは、茨城大学理学部 1 年次授業科目である「(基礎)行列代数」のための補助教材です。

この「行列代数」という授業科目は、線型代数のうちの行列と数ベクトルに関係する部分を 1 年次生に提供するもので、理学系数学の基礎となります。行列の計算、行列式の定義から始まって、連立一次方程式の理論、固有値・固有ベクトルの基本的な運用にいたるまで、半年でカバーします。

内容が少し盛り沢山かも知れませんが、こういった基本概念は今後繰り返し様々な形で現れるものなので、その都度復習を行うことにより、身につけていって欲しい、そのためには早めにその全体像に接するのがよい、という趣旨からです。

目標は少し上の方に設定してそれに向かって努力することにより、当初の目的が達せられるものです。レベルを下げて易しくしたからといって、100%身につくものではありません。基礎の科目は、視点を変えて色々な形を繰り返し反芻することにより、揺るぎない土台となっていきます。

以下で扱われる内容・項目に目を向けると、この教材と典型的な線型代数の教科書のそれとで、いくつかの点で違いに気がつくことでしょう。理由のあることなので、ここで、その主だったものを簡単にまとめておきます。

まず、具体的な行列および数ベクトルを専ら扱うので、抽象的なベクトル空間とか線型作用素(線型変換)は、ここでは出てきません。理論構成上の簡明さよりも、実践的基礎が身につけるとい点からの効率性を優先させました。

一方、内容対時間の制約から、行列式の導入に当っては、帰納的な定義を採用し、実際の計算で必要となる線型性と交代性を強調する方法を取りました。その結果、置換の符合の考えは、行列式が導入された後で、

簡単に説明されることとなります。より本格的には、置換の作るいわゆる対称群の概念から出発すべきかも知れませんが、そうすると、和の記号の抽象的な意味に直面することになり、それが学習者の少なからぬストレスになるはずで、同じストレスであれば、行列式の実践的かつ本質的な性質である線型性と交代性を前面にだすのが教育的であろうとの考えから上で説明したような構成になりました。また、こうすることにより、行列式の発見的意味も明確になるであろうという意図もあります。(偶置換・奇置換の意味を確定させるには、それなりの説明が必要になるため、「なんとなく決まっている」という雰囲気だけで、ごまかしている本もあつたりします。)まあ、この辺は多分に趣味の問題でもあるので、そして一通り終われば大差がないので、好きな方を選べばよいでしょう。

低次元の行列式については、その幾何学的な意味も重要で、これについても、線型性・交代性との関連で理解しておくのが便利です。具体的には重積分の変数変換の公式のところが必要になります。

さて、行列の概念は連立一次方程式の解法と密接な関係があり、連立一次方程式の係数だけを並べて計算することにより、連立一次方程式の不定解を基本となる解の「1次式」の形で表示するという考えにたどり着きます。ガウスの掃き出し法と呼ばれる手法です。これと、行列式の理論とを合体させることにより、「行列代数における基本定理」(政治連立一次方程式が不定解をもつための必要十分条件は、係数行列の行列式が零になること)が導かれます。

不定解をもてば行列式の値は零、という主張の方は簡単なのですが、逆の証明には、それなりの工夫が必要で、この部分をどう処理するかで、本の著者の個性が発揮されます。(ここの部分がどれだけ分かり易く書いてあるかで、その本の評価ができそうなくらいです。)

ここまで辿りつけば、あとは、固有値と固有ベクトルさらには対角化の問題を扱うのは、簡単で、どの本の説明も大きな違いはないはずで、固有値を(固有方程式を解いて)手で計算するという事は、応用上現実的ではありませんが、問題にすべき対象を明確に認識しておくことは、仮に数値的近似計算をする上でも、押さえておくべきポイントとなるでしょう。

行列の対角化に関連して、対称行列の符号の考え方も重要です。これについては、最初の全体を見とおすサーベイのところ、2行2列の場合を説明しておきました。2変数の極値問題のところ、必要になります。

半年で学ぶ内容としては、このあたりで十分のような気もしますが、余

裕があれば、さらに進んで、内積が関係した線型代数に駒を進めてみるのも悪くないかも知れません。そのための簡単なまとめを最後に付け加えました。

以上が、この教材の（そして「行列代数」の）内容ですが、ここで抜け落ちている部分は、当然のことながら、線型代数の抽象的な扱いです。内積の扱いにも関係しますが、ベクトルを抽象的に捉えなおすことは、理論上も応用上も重要です。そこでは、基底の概念が重要な役割をはたします。基底と付随した座標の考えを使えば、行列の計算規則は、線型作用素（線型変換）の合成規則に昇華されます。さらには、関数をベクトルとして扱う関数解析や、ベクトルの多成分化であるテンソルとか、代数的にも幾何学的にも重要な概念へと発展していくのですが、そういった、線型代数の残りの部分は、「行列代数」の続編である「線形代数」でカバーします。より高度な応用を目指す方は、そちらにもチャレンジしてください。

1 授業の展望

高校ではベクトルという考えを学んだ（はずである）。ベクトルは単に幾何学的な問題を解く上で役に立つだけでなく、現実の様々な数理現象を表現する際にも必要不可欠な概念である。一つ具体例を挙げると、物理でいうところの力は、空間的な（＝3次元的な）ベクトルとして捉えることができる。他に平面に限定された（2次元的）ベクトルが視覚的にもわかり易くこちらは、平面の位置ベクトルとしてお馴染みの通りである。いずれにしてもベクトルの本質的な性質は、ベクトルどうしの和およびベクトルの定数倍が定義できて、いくつかの代数的な計算規則が成り立つことである。

ベクトルは、一方でまた、成分を使って $\vec{v} = (a, b)$ といった表し方が可能で、ベクトルの距離的な情報である内積は、

$$(\vec{v} | \vec{v}') = aa' + bb', \quad \vec{v}' = (a', b')$$

という成分表示が可能である。

これを拡張してしていくために、以下ではベクトルを表すのに、その成分を縦に並べた

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

という表示も使うことにして、これを縦ベクトルと呼び、従来の横に並べた横ベクトルと区別することにする。そして、横ベクトルと縦ベクトルの積を

$$(a \ b) \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$$

により定義する。これが内積の一つの解釈法である。

さて、ベクトルは数の1次元的配列でもあったが、数の2次元的配列を行列と呼ぶ。例えば、4つの数(スカラー)を2行2列に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と配列して括弧で括ったものを2次の正方行列と呼ぶ。これは、

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

という2つの縦ベクトルを横に並べたもの、あるいは

$$(a \ b), \quad (c \ d)$$

という2つの横ベクトルを縦に並べたものと見ることもできる。この2種類の見方を適宜使い分けて、行列と縦ベクトルあるいは横ベクトルの積を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy \quad bx + dy)$$

によって定める。

この計算規則をさらに押し進めれば、行列どうしの積の定義

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

に到達する。

一方行列どうしの和およびスカラー倍は、ベクトルのそれに倣って、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}, \quad t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$$

ということにすれば、行列あるいはベクトルの積と和に関して、結合法則、分配法則が成り立つ。

和に関して零に相当する行列あるいはベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形のものでそれぞれ零行列、零ベクトルと呼ばれる。(ただし、表す記号は数の 0 と同じものを流用することにする。)

積に関して 1 に相当する行列は、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、単位行列と呼ばれる。

行列の積に関して、行列 A の逆数に相当するのは、

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

となる行列 A^{-1} であり、 A の逆行列と称する。行列においては、数の場合と違って、零行列と逆行列をもつ行列の間には大きなギャップがある。実際、行列 A の行列式 $|A|$ を (行列 A を表示する際の括弧を適宜省いて)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

で定義すれば、

$$A^{-1} \text{ がある} \iff |A| \neq 0$$

であり、このとき逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

行列とベクトルの積を、ベクトルから新たなベクトルを作り出す操作と思えば、ベクトルを角度 θ だけ回転させる操作は行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を左から掛けることによって実現される。その意味で、この行列を(角度 θ の)回転行列と称する。三角関数の加法定理は、回転行列の積の公式

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$$

に他ならない。

こういった、行列の掛け算に関して行列の構造を調べる上で基本的な考え方が行列の対角化である。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

という実対称行列は回転行列 $R(\theta)$ の角度 θ を適当にとれば、

$$R(\theta)^{-1}AR(\theta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の形の対角行列に直すことができる。(α, β を行列 A の固有値と称する。) 実際左辺を計算すれば、

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}, \quad b' = b \cos 2\theta + \frac{c-a}{2} \sin 2\theta$$

となるので、 $b' = 0$ であるように θ を選ばばよい。

行列 A の対角化は、 A のべき乗の計算を容易にするだけでなく、

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

という、いわゆる2次形式の最大最小問題の分析をする上でも重要である。例えば、関数 $f(x, y)$ が最小値をもつための必要十分条件は $\alpha \geq 0$ かつ $\beta \geq 0$ となることである、等。

以上のべた2行2列の場合の計算を一般のサイズの行列においても実行してみようというのがこの授業の趣旨である。

問 1.

- (i) 回転の行列の関係式 $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$ が三角関数の加法定理と同等なことを示せ。
- (ii) 対称行列を対角化するための回転行列の回転角が満たすべき関係式を求めよ。

2 数の集合

自然数 (natural number)、実数 (real number)、複素数 (complex number) の集合をそれぞれ、

$$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

という記号で表す。以下、単に数といった場合には、このいずれかを指すものとする。また数というかわりにスカラー (scalar) という言い方もする。

3 行列の計算

数の配列 (array) と添え字 (index)。行列 (matrix) の計算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を $m \times n$ 型の行列と言う。とくに、行ベクトル (row vector)、列ベクトル (column vector)。

ここでは、行列として配列された範囲をはっきりさせるために丸括弧を使ったが、角括弧を使う人も多い。区切りさえわかれば何を使ってもいいし、紛らわしくなければ括弧で括る必要もない。ただし、縦線で区切るとは普通しない。後でも出てくる行列式の記号と区別つかなくなってしまうので。

- 和 (addition) とスカラー倍 (scalar multiplication)
- 積 (product) は $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l}$ に対して

$$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$$

で定義される $m \times l$ 行列である。

縦割と横割を使うと、行列の積が

$$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j b_j$$

の配列で構成されることに注意。

問 2. 行列の計算を実際に色々行ってみよう。

命題 3.1. 行列の和と積に関して、

- (i) 行列の和に関して、結合法則 (associativity law) と交換法則 (commutativity law) が成り立つ。
- (ii) 行列の積に関して結合法則が成り立つが交換法則は (一般には) 成り立たない。
- (iii) 行列の和と積に関して、分配法則 (distribution law) が成り立つ。

- 積の結合法則の証明で、和の記号の使い方 $\sum_{1 \leq j, k \leq n}$ の説明。
- 単位行列 (unit matrix) を記号 I_n で表す。ここでクロネッカーのデルタ記号 (Kronecker's delta) の説明。

問 3. 次の2つの行列 (ベクトル) の積を計算し、その結果を比較せよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

4 2次・3次の行列式

2元連立1次方程式

$$ax + by = s, \quad cx + dy = t$$

を行列の積を使って書けば、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

これを x, y について解けば

$$x = \frac{sd - tb}{ad - bc}, \quad y = \frac{at - cs}{ad - bc}.$$

問 4. この公式を導け。

この共通に現われる分母の式を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 (determinant、意味は「決定式」) といい、

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と書く。この記号を使えば上で与えた解の公式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

となる。

行列 A を縦割にして $A = (\vec{u}, \vec{v})$ と書く。

(i) 線型性 (linearity) :

$$\det(a\vec{u} + b\vec{u}', \vec{v}) = a \det(\vec{u}, \vec{v}) + b \det(\vec{u}', \vec{v}).$$

(ii) 交代性 (alternating property) :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

(iii) 規格化条件 (normalization condition) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

一般化

$$a_1x + b_1y + c_1z = t_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = t_2 \tag{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = t_3 \tag{3}$$

未知数 x を定数とみて第 2、3 式を y, z について解くと

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} t_2 - a_2 x & c_2 \\ t_3 - a_3 x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 - a_2 x \\ b_3 & t_3 - a_3 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 \\ b_3 & t_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x. \quad (5)$$

そこで、(1) 式を $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 倍して、(4), (5) 式を代入すると

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) x = t_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} t_2 & b_2 \\ t_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この両辺には同じ形の式が現れるので、3 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

で定義する。(1 行目に関する展開。) そうすると、上で求めた連立方程式の解の公式は、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1 \\ t_2 & b_2 & c_2 \\ t_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

などとなる。

3 次の行列式の性質。

- (i) 線型性：行列式 $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は各ベクトルについて、1 次式の性質を持つ。
- (ii) 交代性： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のうち 2 つのベクトルを入れ替えると行列式の値にマイナス符号がつく。
- (iii) 規格化条件：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

問 5. 未知数 y, z を 3 次の行列式を使って表す公式を導け。

5 一般の行列式

n 次の行列式を、 $n - 1$ 次の行列式を使って帰納的に、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と定義する。ただし、 $[a_{2j}], \dots, [a_{nj}]$ とあるのはその部分の削除を意味する。(1行に関する展開。)

行列式のサイズに関する帰納法で(2次の行列式の性質から3次の行列式の性質を導いたのと同じ方法で)、次の性質を確かめることができる。

- (i) 線型性：行列式 $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ は各ベクトルについて1次式の性質を持つ。
- (ii) 交代性： $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ のうちの2つのベクトルを入れ替えると行列式の値は符号が反対になる。
- (iii) 規格化条件：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

たとえば、 \vec{a}_k と \vec{a}_l ($k < l$) の入れ換えについての交代性を示すのであれば、展開式(定義式)の和の部分

$$\sum_{j \neq k, j \neq l} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{k+1} a_{1k} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2k}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nk}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{l+1} a_{1l} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2l}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nl}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

といった分け方にして帰納法の仮定を使う。あるいは、線型性を確かめたあとで、2つの列を等しいした場合に値が0になることを示す。

問 6. $n = 4$ のときに上の 3 つの性質を確かめよ。

問 7. 行列式の性質 (列に関する線型性と交代性) から、連立一次方程式の解の公式 (Cramèr's rule) を導け。

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ の転置行列 (transposed matrix) tA を ${}^tA = (a_{ji})$ で定める。(転置行列は、しばしば、 A^t という書き方もするが、これだと行列 A の t 乗と紛らわしい。)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

行列式の性質として基本的なものが次の定理である。(証明については、節を改めて述べる。)

定理 5.1.

- (i) 線型性・交代性は行ベクトルについても成り立つ。
- (ii) 行に関する展開式、列に関する展開式が成り立つ。
- (iii) 転置行列の行列式は元の行列式に等しい。
- (iv) 行列の積についての性質。

系 5.2.

- (i) 行列式のなかに同じ行または列があれば、行列式の値は 0。
- (ii) ある行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加えても行列式の値は変化しない。

例題 5.3. 4 行 4 列の計算例。複数の方法で。

例題 5.4. 三角行列の行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

問 8. いろいろな 4 行 4 列の行列について、その行列式の計算を実行せよ。

6 行列式の特徴づけ

行列式を n 個の n 次列ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の関数 $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ と思ったとき、(i) 列に関する線型性、(ii) 列に関する交代性、(iii) 規格化条件 $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$ を満たす。ここで、

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

は単位行列を縦割にしたとき現れる列ベクトルの集団で基本ベクトルと呼ばれる。この節の目標は、この性質が行列式を特徴づけていること。

目標： n 個のベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の関数 $f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ で、線型性と交代性を満たすものがあれば、それは行列式の定数倍になる。さらに規格化条件もみたせば、行列式に一致する。

基本ベクトルを使うことにより、 \vec{a}_j は

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$$

と表示される。数字 $1, 2, \dots, n$ を並べ換えたものを n 次の置換 (permutation) とよび記号 σ, τ 等で表す。例：

$$\sigma = (3, 1, 2), \quad \tau = (3, 5, 1, 4, 2).$$

[ここで、ギリシャ文字について一言。]

置換 σ の i 番目の数字を $\sigma(i)$ で表す： $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ 。

補題 6.1. 与えられた n 次の置換 σ に対して

$$f(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

Proof. 等式

$$f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

から出発して左辺の f および右辺の \det のなかの 2 つの列ベクトルを入れ替えるたびに両辺の符号が同時に反転し、上の式の等号が成り立ち続ける。勝手な置換はこのような 2 つの入れ替えを何回か繰り返して得られるので、補題の等式が一般の置換で成り立つ。 \square

定理 6.2.

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

Proof. f の列に関する線型性により

$$\begin{aligned} f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) &= f\left(\sum_{i_1} a_{i_1 1} \vec{e}_{i_1}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n n} \vec{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} f(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}). \end{aligned}$$

f の列に関する交代性により、 i_1, \dots, i_n のなかに同じ数字が 2 ヶ所以上現れると、 $f(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n})$ は 0 になる。このような場合を除くと上の和は $(i_1, \dots, i_n) = \sigma$ (σ は置換) という形のものだけを考えれば良いことがわかる。すなわち

$$f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1), 1} \cdots a_{\sigma(n), n} f(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}).$$

この右辺で補題を使えば、

$$f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \sum_{\sigma} a_{\sigma(1), 1} \cdots a_{\sigma(n), n} \det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}).$$

一方 f として行列式 \det をとると、行列式の規格化条件により

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}).$$

これら 2 つの表示式を合わせると定理の主張が得られる。 □

n 文字の置換 σ の符号 (signature) を

$$\epsilon(\sigma) = \det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)})$$

で定義する。

この定義の仕方と行列式の性質から、置換の符号は、もし置換が 2 文字の入れ替えを偶数回行って実現されるならば、 $\epsilon(\sigma) = 1$ 、2 文字の入れ替えを奇数回行って実現されるならば、 $\epsilon(\sigma) = -1$ となる。

問 9. 勝手な置換は、2 文字の入れ替えを繰り返すことにより実現できることを示せ。(あみだ籤の原理。)

系 6.3 (行列式の完全展開).

$$|A| = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

問 10. $n = 3, 4$ の場合に上の完全展開式を具体的に書き下してみよ。(サラスの方法は覚えるべきでない。)

定理 5.1 (行列式の性質) の証明

(i) 行についての交代性を示そう。 i 行と j 行 ($i < j$) を入れ替えることとして、行列 $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ に対してその i 行と j 行を入れ替えた行列を A' で表し

$$f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = |A'|$$

とおく。行列式の列に関する性質 (これは既に確かめてある) を使って、 f が列についての線型性と交代性を満たすことがわかる。そこで上の定理を適用すれば

$$\begin{aligned} f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \\ &= \det(A) |I'|. \end{aligned}$$

ところが I' はまた単位行列の i 列と j 列を入れ替えたものに等しいので、行列式の列に関する交代性と規格化条件により

$$|I'| = -|I| = -1.$$

以上を総合すると、

$$|A'| = f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = -|A|$$

したがって、行に関する交代性が得られた。

次に特定の i 行に注目して、その i 行を一つ前の行と次々入れ替えて最初の行に持ってきて行列式の（帰納的）定義式を使えば、 i 行に関する展開式

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

が得られる。ここで、 A_{ij} は A から i 行と j 列を取り除いた残りの $(n-1) \times (n-1)$ 行列を表す。

A_{ij} は i 行の成分を含まないから、 i 行目に関する線型性は上の展開式から明らか（ i 行目の成分の 1 次式で書ける）。

次に転置行列についての性質を再び上の定理を使って示そう：こんどは、 $f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = |{}^t A|$ と置く。証明したばかりの行に関する線型性・交代性により、 f は定理の仮定を満たす。従って

$$|{}^t A| = f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = |A| f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = |A|.$$

（ $f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = |{}^t I| = |I| = 1$ に注意。）

この転置に対する不変性と行に関する展開式から列に関する展開式が得られる。

最後に行列の積に関する性質を示す。すなわち A, B を $n \times n$ 行列とし $|AB| = |A| |B|$ が成り立つかどうかについて考える。

今、行列 A は固定して、行列 B の列ベクトルを変数とする関数

$$f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = |AB|$$

を考える。 $|AB| = \det(A \vec{b}_1, \dots, A \vec{b}_n)$ であるから、 f は再度、定理の仮定を満たし、従って

$$|AB| = f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = |B| f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = |B| |A|.$$

（ $f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det(A \vec{e}_1, \dots, A \vec{e}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ に注意。）

例題 6.4. 置換の符号と 1 5 パズル。

命題 6.5 (分解型行列式). $m \times m$ 型行列 A と $n \times n$ 型行列 B に対して、

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| |B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}.$$

問 11. 分解型行列式の公式を示せ。

問 12. n 次の正方行列 A の i - j 成分 $a_{i,j}$ が条件

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{for } i + j \geq n + 2$$

を満たすとき、行列式 $|A|$ の値を $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$ の積で表せ。

7 行列式の幾何学的意味

平面の上のベクトル \vec{a}, \vec{b} を考える。 $S(\vec{a}, \vec{b})$ で 2 つのベクトル \vec{a}, \vec{b} から作られる平行 4 辺形の面積を表す。ただし、 \vec{a}, \vec{b} がこの順序で時計廻りの位置にあるときには、面積の値にマイナス符号をつけたものを $S(\vec{a}, \vec{b})$ とする。平行 4 辺形の面積が平行変形で不変であることから

$$S(\vec{a} + \lambda \vec{b}, \vec{b}) = S(\vec{a}, \vec{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

等が成り立つ。これから S の (多重) 線型性が出てくる :

$$\begin{aligned} S(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) &= S(\vec{a} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{b}) = S((1 + \alpha)\vec{a}, \vec{b}) = (1 + \alpha)S(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{c}, \vec{b}). \end{aligned}$$

また定義から S は交代性をもつ。従って基本定理により

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b})S(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \det(\vec{a}, \vec{b}).$$

すなわち 2 次の行列式は平行 4 辺形の符号つき面積を表す。同様の考察により 3 次の行列式は平行 6 面体の符号つき体積を表す。

問 13. 体積の符号はどのように決めるべきか、考察する。(ヒント: 右手系と左手系。)

8 連立 1 次方程式

A を $m \times n$ 行列とし、連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = 0, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を考える。このような定数項が零であるような方程式を斉次型 (homogeneous) と呼ぶ。ベクトルの集合

$$V = \{\vec{x}; A\vec{x} = 0\}$$

をその解空間 (the space of solutions) とよぶ。ベクトル \vec{x} に対して、

$$A\vec{x} = 0 \iff B\vec{x} = 0 \iff C\vec{x} = 0 \iff D\vec{x} = 0.$$

ここで、 B は A の 2 つの行を入れ替えた行列。 C は A のどこかの行に別の行の定数倍を加えたもの。 D は A のどれかの行に 0 でない数を掛けたもの。

結論として連立 1 次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解空間は、行列 A に上の 3 種類の操作を繰り返し施して行列の形を変えていっても変化しない。

- (i) A の行を入れかえる。
- (ii) A のいずれかの行の定数倍を別の行に加える。
- (iii) A の何れかの行に 0 でない数を掛ける。

連立 1 次方程式の解法の基本は、この 3 種類の操作を繰り返すことにより、最初に与えられた行列を階段行列 (triangular matrix) に変形することにある。

ここで、階段行列とは、左下に 0 が並び、上から一段ずつ行成分が減っていく形のもの。 j_1, j_2, \dots, j_r 列に階段の角が現れるとすると、0 でない行が r 行続いて階段行列になる。

$$\begin{pmatrix} & & & j_1 & & j_2 & \dots & j_r & & \\ 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & c_2 & \dots & & & \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & \dots & 0 & c_r & \dots & \\ 0 & & & \dots & & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

定理 8.1. 最初の二種類の操作の有限回の繰り返して、全ての行列は階段行列に変形可能である。

問 14. 変形のアルゴリズム [ガウスの掃き出し法 (Gaussian elimination) という] について検証せよ。

Remark. 階段行列は、さらに階段の各コーナーの成分が 1 でさらにコーナーを含む列の他の成分はすべて 0 であるように変形しなおすことができる。このような階段行列を簡約された (reduced) と呼ぶことにする。

定義 8.2. $m \times n$ 行列 A を階段行列に変形したときの 0 でない階段の数を行列 A の階数 (rank) と呼び $r(A)$ と書く。 ($r(A) \leq m, r(A) \leq n$ に注意。)

例題 8.3. 具体的な行列を上記の 2 種類の操作で簡単にする。

連立一次方程式 (斉次型) の解法

階段行列に対しては、下の行から連立 1 次方程式を解いていく。まず、 r 行の式から、 x_{j_r} を変数 x_{j_r+1}, \dots, x_n の 1 次式で表すことができる。次に、 $r-1$ 行の式から、 $x_{j_{r-1}}$ を $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n$ で表すことができるが、このうち x_{j_r} は、 x_{j_r+1}, \dots, x_n で表されるので、この段階で自由に選べる変数は、 $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_{j_{r-1}}$ の $j_r - j_{r-1} - 1$ 個。

以下、これを繰り返すと、 x_{j_1}, \dots, x_{j_r} をそれ以外の変数について解いた式が得られる。

階段行列が簡約された形の中には、この議論は次のように簡単になる：ベクトル \vec{x} の成分を階段のコーナーとして現れる列成分 x' とそれ以外の成分 x'' に分ければ、考えている連立一次方程式は、 x' が x'' の 1 次式で表される、という形になるので、 x'' を任意定数として即座に解くことができる。

例題 8.4. ここで階段行列に対する連立 1 次方程式の解き方について具体例で説明する。解の表示のさせ方。

問 15. 各自、問題を自分で作り計算練習を行う。

d 個の列ベクトル $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ の間に 1 次式の関係がないとき、すなわち、

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \vec{x}_i = 0$$

をみたすような数 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ は、自明なもの以外にないとき、ベクトルの集団 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ は 1 次独立 (linearly independent) であると呼ぶ。

いま、行列 A の階段行列への変形 A' が一つ得られたとする。このとき V に属するベクトルの集団 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ ($d = n - r(A)$) を連立 1 次方程式 $A'\vec{x} = 0$ を解くことにより定めれば、これらは、1 次独立でかつ V の勝手なベクトルは、 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ の 1 次式で書くことができる。一般に解空間 V の中から選んだベクトルの集まり $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ が

(i) 1 次独立である、

(ii) V の勝手なベクトル \vec{x} が $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ の 1 次式で書ける、

なる 2 条件を満たすとき、その集団を解空間 V の基底 (basis) と呼ぶ。連立 1 次方程式が自明であるとき、すなわち $A = 0$ で、解空間 V がすべてのベクトルから成るときは、 V を省略して単に基底という言い方をする。

Remark . 基底といった場合には、集団の順序をも問題にする。従って、 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_d$ と $\vec{x}_2, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ とは別の基底と考える。

問 16. 具体的な斉次型連立 1 次方程式の解空間について、その基底を求めよ。

命題 8.5. 解空間の基底の個数と行列の階数の和は n に等しい。

補題 8.6. A を $m \times n$ 行列、 B を $n \times m$ 行列とし、 $AB = I_m$ とすると、 $m \leq n$ である。

Proof. 仮に、 $m > n$ としよう。 B の階段行列への変形を考えれば、 $B\vec{x} = 0$ となる m 次の列ベクトル $\vec{x} \neq 0$ が存在する。ところが、 $AB\vec{x} = I_m \vec{x} = \vec{x}$ だから矛盾。

[別解] $m > n$ と仮定する。行列 A にサイズ m の零列ベクトルを $m - n$ 個付け加えた $m \times m$ 行列を A' とし、行列 B にサイズ m の零行ベクトルを $m - n$ 個付け加えた $m \times m$ 行列を B' で表せば、簡単な計算で $AB = A'B'$ であることがわかるので、

$$1 = |I_m| = |A'B'| = |A'||B'| = 0$$

となって矛盾である。 □

定理 8.7.

- (i) 連立 1 次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解空間には基底がかならず存在する。
- (ii) 解空間 V の基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方によらずに一定である。
- (iii) 行列の階数は、階段行列の作り方によらない。

Proof. (i) はすでに見た。

(ii) を見るために $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$ を 2 組の基底としよう。基底の 2 番目の性質により、

$$\vec{x}_i = \sum_j b_{ji} \vec{y}_j, \vec{y}_j = \sum_i c_{ij} \vec{x}_i$$

と書ける。これらを相互に代入して基底の性質 (i) を使うと、

$$BC = I_s, \quad CB = I_r$$

という関係が得られる。ここで、例題を使えば、 $r \leq s, s \leq r$, すなわち $r = s$ が得られた。

(iii) は、階段行列から基底が作られることおよび (ii) の主張より従う。 □

定義 8.8. 解空間 V の基底を形成するベクトルの個数を V の次元 (dimension) とよび、記号 $\dim V$ で表す。

一般の（非斉次型）連立一次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

を解くには、 $m \times n$ 型行列 A の最後の列に列ベクトル \vec{b} を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $B = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b})$ を階段行列に変形し、それを A の階段行列への変形部分、すなわち最初の n 列目までの部分、と見比べる。

- 階段の数が増えていけば（すなわち行列 A, B の階数が違っていけば）、解は存在しない。
- 階段の数と同じであれば、斉次方程式の場合と同様に、自由に選べる変数を下の方から勝手に選んできて、段差のところの変数は方程式から決めていくという方法を繰り返すと、解が存在し、解の不定性の自由度が自由に選べる変数の数（ $= n - r(A)$ ）だけあることもわかる。

問 17. 具体例で上の方法を確認せよ。

9 逆行列と基底

$n \times n$ 行列 A に対して

$$AB = BA = I_n$$

となる $n \times n$ 行列 B を A の逆行列 (inverse matrix) という。 A の逆行列は、あっても一つしかない。 A だけで決まるので A^{-1} と書く。

例題 9.1.

- (i) 積の逆行列。 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (ii) 積の転置行列。 ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
- (iii) 転置と逆行列。 ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

例題 9.2. 基本変形を与える行列の逆行列。

A が逆行列をもてば $|A||B| = |AB| = |I_n| = 1$ から $|A| \neq 0$ が出てくる。逆に $|A| \neq 0$ としよう。 A_{ij} で A から i 行 j 列を除いた $n-1$ 次の行列を表すと、 j 行に関する展開式により

$$\sum_k (-1)^{j+k} x_k |A_{jk}|$$

は A の j 行目をベクトル (x_1, \dots, x_n) で置き換えた行列の行列式に等しい。したがって、

$$\sum_k (-1)^{j+k} a_{jk} |A_{jk}| = \delta_{ij} |A|.$$

同じように j 列に関する展開式を使えば、

$$\sum_k (-1)^{j+k} a_{ki} |A_{kj}| = \delta_{ij} |A|.$$

そこで $n \times n$ 行列を $C = ((-1)^{i+j} |A_{ji}|)$ で定めれば、上の2つの式は

$$AC = CA = |A|E_n$$

となるので、 $|A|^{-1}C$ が A の逆行列になっている。

これはクラメル公式 (Cramér's formula) と呼ばれ有名であるが、以下では使わない。

補題 9.3. $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ を 1 次独立なベクトルの集まりとすると、これにベクトルを補って基底にすることができる。

Proof. 標準基底 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ 中のベクトルで、 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ の一次式で書けないものが有ったときには、その書けないベクトルを \vec{x}_{m+1} とおくと、 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}\}$ は一次独立である。実際、

$$t_1 \vec{x}_1 + \dots + t_m \vec{x}_m + t_{m+1} \vec{x}_{m+1} = 0$$

として、もし $t_{m+1} \neq 0$ であれば、

$$\vec{x}_{m+1} = \frac{t_1}{t_{m+1}} \vec{x}_1 + \dots + \frac{t_m}{t_{m+1}} \vec{x}_m$$

となって、 $v_{x_{m+1}}$ が $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ の一次式で書き表せるので仮定に反する。したがって、 $t_{m+1} = 0$ となって、

$$t_1 \vec{x}_1 + \dots + t_m \vec{x}_m = 0$$

が得られるので、 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ が一次独立であることから、

$$t_1 = \dots = t_m = 0$$

となって、 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}\}$ の一次独立性が示された。

この議論を繰り返すと、最終的に一次独立なベクトルの集団 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l\}$ で、全ての \vec{e}_j がこれらの一次式で表されるものが出現する。任意のベクトルは標準基底の一次式で書き表されるので、 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l\}$ の一次式で全てのベクトルが表示できる。すなわち、 $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l\}$ は基底である。□

定理 9.4 (行列の基本定理). 次は同値。

- (i) A は逆行列をもたない。
- (ii) $|A| = 0$.
- (iii) $A\vec{x} = 0$ となるベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ がある。

Proof. (i) \iff (ii) はすでにやった。(iii) \Rightarrow (i) は明らか。

そこで、(ii) \Rightarrow (iii) を示す。そのために (iii) の条件をもう少し詳しく調べる。具体的には、連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解いてみる。

ベクトル \vec{x} に対して、

$$A\vec{x} = 0 \iff B\vec{x} = 0 \iff C\vec{x} = 0.$$

ここで、 B は A の 2 つの行を入れ替えた行列。 C は A のどこかの行に別の行の定数倍を加えたもの。したがって連立 1 次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解は、行列 A に次の 2 種類の操作を繰り返し施して行列の形を変えていっても変化しない。この 2 種類の操作は、 A に左から特殊な行列 (行基本行列) を掛けることによっても得られ、変形のどの段階でも行列式の値は 0 であり続ける。従って変形によって得られた階段行列 A' も $|A'| = 0$ をみたす。階段行列は三角行列の形になっているので、 $|A'| = 0$ であるた

めには、対角成分が 0 となる個所があることになり、階段の段数は n よりも小さくなって、解空間は自明でないベクトル \vec{x} を含まなければならない。

[別解] (iii) の否定を仮定すると、 $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ は一次独立で、従って基底となる。もし、基底でなければ基底を成すベクトルの個数が n を越えてしまう。そこで、基本ベクトル $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ を $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の一次結合として表せば、その係数行列 B は、 $BA = I_n$ を充たし、したがって $|A| \neq 0$ となって (ii) の否定が得られた。

以上により (i), (ii), (iii) の同値性が得られた。 □

系 9.5. 行列 A の列ベクトルの集団 $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ が基底を形成するための必要十分条件は、 A が逆行列をもつことである。

問 18. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないとき、 t の値を求めよ。

問 19. 3次元数ベクトル空間で、ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を含む基底を 1 組作れ。

問 20. 逆をもつ行列は、行基本行列の有限個の積で書ける。列基本行列の有限個の積でも書ける。

10 行列の対角化

行列 D で次の形のを対角行列 (diagonal matrix) とよぶ。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、逆をもつ行列 P を適当に選んで $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにする操作を行列の対角化 (diagonalization) と呼ぶ。対角化の直接の御利益は冪の計算が簡単になること。

対角化の行列を見つけるために、 P を縦割りにして $P = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ と表すと、 $AP = PD$ という関係は

$$A\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

となる。そこで、行列 A に対して、ベクトル $\vec{x} \neq 0$ が

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

なる関係をみたすとき、 \vec{x} を固有値 (eigenvalue) λ の固有ベクトル (eigenvector) とよぶ。

定理 10.1. 行列 A の固有値 λ は方程式 (固有方程式, *eigen equation*, という)

$$|tI_n - A| = 0$$

の解である (左辺を固有多項式という)。

Proof. 定理 9.4 による。 □

命題 10.2. 行列 A の固有多項式 $f_A(t) = |tI_n - A|$ は、

$$f_A(t) = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|$$

という形の t の n 次式であり、相似変形で不変である。

$$|tI_n - P^{-1}AP| = |tI_n - A|.$$

Proof. 行列式の完全展開式

$$|B| = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n}, \quad B = tI_n - A$$

で、 t が含まれる因子は対角成分 b_{11}, \dots, b_{nn} のみであるから、一箇所でも対角成分でない因子が現れると、その項には他にも対角成分からはずれる因子が現れることになり、そのような項に含まれる t の次数は $n-2$ 以下になる。従って、 $|tI_n - A|$ の中の t^n, t^{n-1} の係数は対角成分の積

$$(t - a_{11})(t - a_{22}) \dots (t - a_{nn}) = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \dots$$

の中に含まれるそれと一致する。 □

定義 10.3. 行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を使って、固有多項式を

$$|tI_n - A| = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

と因数分解するとき、 m_j を固有値 λ_j の重複度 (multiplicity) という。

定義 10.4. 行列 A の固有値 λ に対して連立 1 次方程式 $(\lambda I_n - A)\vec{x} = 0$ の解空間を固有値 λ の固有空間 (eigenspace) と呼び V_λ と書くことにする。

命題 10.5. 行列 A の固有値 λ に対して、固有空間 V_λ の次元は、 λ の重複度以下である。

Proof. 固有空間 V_λ の基底を補って全体の基底を作り、行列 A の相似変形を行うと分解型の行列が得られるので、行列式の因子分解式を使う。□

定理 10.6. 行列 A の異なる固有値全てに名前をつけて $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ とする。固有値 λ_i の固有空間の次元を d_i 、その重複度を m_i で表す。このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は、 $d_i = m_i$ for $1 \leq i \leq r$.

Proof. 対角化できれば、固有ベクトルからなる基底が存在するから、

$$n \leq \sum_{i=1}^r d_i$$

これと $d_i \leq m_i$ および $\sum_i m_i = n$ と併せて、等号の成立がわかる。

逆に、等号がなりたつとする。 $\{\vec{x}_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq d_i}$ を固有空間 S_i の基底とする。これらを一列に並べると、等号成立の仮定から、 n 個のベクトルの集団が得られる。そこで、あとはこれが 1 次独立であることを言えばよい。そのためには次の補題を使えばよい。□

補題 10.7. 異なる固有値に属する固有ベクトルは、互いに 1 次独立である。

Proof. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を異なる固有値とし、 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$ を対応する固有ベクトルとする。もし、

$$\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_r = 0$$

が成り立てば、 $\vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_r = 0$ である。実際、 $(A - \lambda_1) \dots (A - \lambda_{r-1})$ をかけると、

$$0 = (A - \lambda_1) \dots (A - \lambda_{r-1}) \vec{x}_r = (\lambda_r - \lambda_1) \dots (\lambda_r - \lambda_{r-1}) \vec{x}_r$$

から、 $\vec{x}_r = 0$ がわかる。 □

対角化の手続き

ステップ 1 固有方程式を解くことにより、固有値を求めると共に固有値の重複度を調べる。

ステップ 2 固有空間を連立一次方程式の解空間として実現し、あわせて、固有空間の基底を求める。

ステップ 3 ステップ 2 で求めた固有空間の次元とステップ 1 で求めた重複度が一致しない固有値が一つでもあれば、扱っている行列が対角化できない。

そうでなければ、すなわち、全ての固有値に対して、固有空間の次元と重複度が一致しているならば、各固有空間の基底をすべて並べることにより全体の基底を得るので、対応する行列を

$$P = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n), \quad \vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j$$

とおけば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

という形の対角化を得る。

行列の対角化の手続きで最も面倒な部分は、固有方程式を解く（固有値を求める）部分である。行列のサイズが 3 以上の場合は、でたために選んだ行列に対してその固有方程式は具体的には解きがたい。

よく本とかに載っている対角化の問題は、ではどうやって作るのかと言えば、固有値と固有ベクトルを最初に与えてそれから、対角化する前の行列を逆算するという「ずるい」方法を取らざるを得ない。

例題 10.8. 与えられた固有値と固有ベクトルから、もとの行列を復元し、復元した行列から逆に、上で述べた対角化の手続きに従って、対角化を実行してみよう。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 2b - 3c & 4a - 2b - 2c & 2a - 2c \\ -6a + 3b + 3c & -4a + 3b + 2c & -2a + 2c \\ -3a + 3c & -2a + 2c & -a + 2c \end{pmatrix}.$$

問 21.

- (i) 上の例で、 a, b, c に色々な値を代入して対角化の手続きを確認する。
- (ii) 行列 T およびその逆行列 T^{-1} の成分が全て整数となるような行列はどのようにして作り出せるか考えてみる。(ヒント：基本行列の場合に考察してみる。)

2行2列の行列については、固有方程式が2次方程式になることもあって、全てのことを完全に記述することが可能である。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置いて、その対角可能性について調べてみよう。

まず固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} t - a & -b \\ -c & t - d \end{vmatrix} = t^2 - (a + d)t + ad - bc = 0$$

となるので、これが異なる二つの解をもてば対角化可能となる(何故か)。

そこで対角化できない可能性のあるのは、重根 (multiple root) をもつ場合、すなわち

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc = 0$$

でなければならない。このとき A の固有値は、 $\lambda = (a + d)/2$ のただ一つである。したがってこのような行列が対角化できるのは、

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda I_2$$

の場合、すなわち、 $a = d, b = c = 0$ のときに限る。

まとめると、 2×2 行列 A が対角化できるための必要十分条件は、(i) A が単位行列のスカラー倍であるかまたは (ii) $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$ 、である。

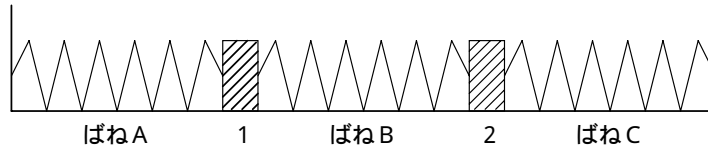
例題 10.9. 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$$

は、 $b \neq 0$ であれば、対角化できない。

問 22. 上の例題で与えた行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

対角化の具体的な応用例では、上で述べたような対角化そのものよりも、固有値を固有ベクトルを求めたあとは、問題になっているベクトルを固有ベクトルの和で表すだけで済むことが多い。



という状況を考えて、質点 1 の変位を x で、質点 2 の変位を y で表し、それぞれのばねのばね定数を a, b, c とすれば、運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。そこで、右辺の行列の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

が見つければ、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = f(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と置くことにより、

$$\frac{d^2}{dt^2} f = \lambda f(t)$$

に帰着する。

問 23. 三つのばね定数が共通の値 k に近いとき、すなわち $\alpha = a - k$, $\beta = b - k$, $\gamma = c - k$ が微小量であるとき、行列

$$\begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -b-c \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ。

11 内積とエルミート共役

この節の内容は標準的でどの本の記述も大差ないので、各自で「教科書」に当て補っておいて欲しい。

量子力学では物理状態を「ベクトル」で表す。さらに2つの状態 (= ベクトル) a, b に対して確率振幅とよばれる複素数 $\langle a|b \rangle$ を対応させて状態 a から状態 b への遷移確率が $|\langle a|b \rangle|^2$ で与えられるとする。

ベクトル空間の抽象化の必要性。数列の作るベクトル空間 $V = \{x = (x_k)_{k \geq 0}\}$ 上の線型作用素 D (階差作用素、difference operator、shift operator)

$$(Dx)_k = x_{k+1}.$$

線型漸化式

$$c_0x_k + c_1x_{k+1} + \cdots + c_nx_{k+n} = 0$$

の解空間 S は、線型作用素

$$c_0I + c_1D + \cdots + c_nD^n$$

の kernel でもある。

例題 11.1.

- (i) Fibonacci 数列の一般解の求め方。
- (ii) 定数係数線型常微分方程式の解の求め方。

ベクトルの性質。和とスカラー倍 (複素あるいは実数倍)、ゼロベクトルの存在。分配法則の成立。

例題 11.2.

- (i) 周期的な数列の作るベクトル空間。 $\{c = (c_n); c_{n+N} = c_n, n \in \mathbb{Z}\}$.
- (ii) エルミート行列の作る実ベクトル空間。 $\{A; A^* = A\}$.
- (iii) 有限閉区間上の連続関数の作るベクトル空間。

定義 11.3. 内積 (inner product) の定義と性質。ノルム (norm) の定義。直交 (orthogonal) という言葉使い。

例題 11.4. 上記 (i), (ii), (iii) について自然な内積が存在する。

命題 11.5 (シュワルツの不等式、Schwarz' inequality). 内積空間 (= 内積が指定されたベクトル空間) において、不等式

$$|(v|w)|^2 \leq (v|v)(w|w)$$

がなりたつ。

Proof. 複素数 z と実数 t に対して、不等式

$$0 \leq (v + tzw|v + tzw) = (v|v) + t(z(v|w) + \bar{z}(w|v)) + t^2|z|^2(w|w)$$

が成り立つ。ここで、 $z = (w|v)$ と選ぶと、この不等式は

$$|(v|w)|^2(w|w)t^2 + 2|(v|w)|^2t + (v|v) \geq 0$$

という t について 2 次の絶対不等式となるので、その判別式条件から、

$$|(v|w)|^4 - |(v|w)|^2(v|v)(w|w) \leq 0$$

となって、これから求める不等式が得られる。 □

例題 11.6.

(i) 複素数 $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ に対して、

$$\left| \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2.$$

(ii) 連続関数 $f(t), g(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対して、

$$\left| \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

行列のエルミート共役 (hermitian conjugate) の定義とその性質。行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 $A^* = (\bar{a}_{ji})$ と置き、 A のエルミート共役と称する。最も基本的な関係式が

$$(v|Aw) = (A^*v|w), \quad v, w \in \mathbb{C}^n$$

であり、これから以下の性質が容易に導かれる。

- $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- $(cA)^* = \bar{c}A^*$.
- $(AB)^* = B^*A^*$.
- $(A^*)^* = A$.

ユニタリー行列 (unitary matrix) とエルミート行列 (hermitian matrix)、直交行列 (orthogonal matrix) と対称行列 (symmetric matrix)。

正規直交系 (orthonormal system) ・ 正規直交基底 (orthonormal basis) の定義と幾何学的解釈。

$n \times n$ 行列 $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ に対して、

U はユニタリー行列 $\iff \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ は正規直交基底

である。

例題 11.7.

(i) 3 次のエルミート行列の形は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c \\ \bar{b}_1 & a_2 & b_2 \\ \bar{c} & \bar{b}_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

ここで、 a_j は実数、他は複素数を表す。

(ii) 2 次のエルミート行列の作る実ベクトル空間の基底として、Pauli のスピン行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を取ることができる。

例題 11.8.

(i) 行列

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

は回転 (rotation) を表す。

(ii) n 次の置換 $\sigma = (\sigma(i))_{1 \leq i \leq n}$ に対して、行列

$$U = (\delta_{j, \sigma(k)})_{j,k}$$

はユニタリー行列である。とくに巡回置換 (cyclic permutation) $\sigma = (23 \dots n1)$ に対して、

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

Remark .

- (i) エルミート行列の和も差もエルミート行列であるが、エルミート行列の積はエルミート行列になるとは限らない。
- (ii) ユニタリー行列の積はユニタリー行列となるが、ユニタリー行列の和はユニタリー行列になるとは限らない。

命題 11.9.

- (i) エルミート行列の固有値は実数。
- (ii) ユニタリー行列の固有値は、絶対値 1 の複素数。

問 24. 二つのユニタリー行列 U, V に対して、 $U + V$ が再びユニタリー行列になるのはどのような場合か。

補題 11.10 (Schmidt の直交化). 与えられた正規直交系 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ とこれと独立な (すなわち、これらの一次式で書けない) ベクトル \vec{v} に対して

$$\vec{v}' = \vec{v} - \sum_{j=1}^m (\vec{u}_j | \vec{v}) \vec{u}_j, \quad \vec{u}_{m+1} = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}'$$

とすると、 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}$ は正規直交系をなす。

系 11.11. 与えられた正規直交系 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ に対して、それを含む正規直交基底がとれる。

補題 11.12. 任意の行列はユニタリ行列で三角行列に変形できる。

Proof. 行列のサイズ n の大きさに関する帰納法。サイズが $n-1$ の行列に対しては正しいと仮定する。いま、サイズが n の行列 A に対して、 A の固有値 α とその固有ベクトル \vec{u} を 1 組選び、 $\vec{u}_1 = \vec{u} / \|\vec{u}\|$ を含む正規直交基底 $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ を用意すると、

$$A(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

という表示が得られる。ただし B はサイズが $n-1$ の行列である。こうして得られた行列 B に帰納法の仮定を適用すると、サイズが $n-1$ のユニタリ行列 V で、 V^*BV が (サイズ $n-1$ の) 三角行列となるものが存在する。そこで、サイズが n のユニタリ行列を

$$U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

で定めると、 U^*AU は三角行列となつてめでたい。 □

定義 11.13. 行列 A で、 $AA^* = A^*A$ となるものを正規行列 (normal matrix) と呼ぶ。正規行列でないものは、「アブノーマル」とは呼ばずに、非正規 (non-normal) という言い方をする。エルミート行列、ユニタリ行列は正規行列である。

定理 11.14. 正規行列はユニタリ行列で対角化できる。

Proof. まず、正規行列 A とユニタリ行列 U に対して、行列 U^*AU は再び正規行列になることに注意する。

そこで、三角行列 B に対して、

$$BB^* = B^*B \iff B \text{ は対角行列}$$

を示せば証明が完了する。これは、直接計算してみるとわかる。 □

Remark. ここでは、できるだけ手っ取り早い証明を与えたが、もっと自然な方法は、行列が線型作用素の表示形式であることと、下の固有ベクトルの性質、および直交分解を組み合わせたものである。「線型代数」(草場公邦)を参照。

次の固有ベクトルに関する正規行列の性質もきわめて重要である。

命題 11.15. 正規行列 A に対して、

- (i) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ならば、 $A^*\vec{x} = \bar{\lambda}\vec{x}$ である。
- (ii) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ ($\lambda \neq \mu$) であるならば、 \vec{x} と \vec{y} は直交する。

Proof. (i) は、

$$0 = ((A - \lambda I)\vec{x} | (A - \lambda I)\vec{x}) = ((A^* - \bar{\lambda}I)\vec{x} | (A^* - \bar{\lambda}I)\vec{x})$$

からわかる。(2つ目の等号で、 $AA^* = A^*A$ を使う。)

(ii) は (i) に注意して、

$$\mu(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | A\vec{y}) = (A^*\vec{x} | \vec{y}) = \lambda(\vec{x} | \vec{y})$$

による。

□

正規行列の対角化のステップ

ステップ 1 固有方程式を解くことにより、固有値を求める。

ステップ 2 固有空間を連立一次方程式の解空間として実現し、あわせて、固有空間の基底を求める。

ステップ 3 ステップ 2 で求めた固有空間の基底を Schmidt の方法で正規直交化する。

ステップ 4 ステップ 3 で求めた正規直交系を固有値の種類だけ並べ、ユニタリー行列を作るとそれが正規行列の対角化を実現する。

例題 11.16.

- (i) A 型のエルミート行列の対角化。
- (ii) 回転の行列の対角化。
- (iii) 巡回置換のユニタリー行列の対角化。

次の命題は今までに用意した定理・方法を組み合わせることで、容易に示すことができる。

命題 11.17. 実対称行列は直交行列によって対角化される。

問 25. 何をどう組み合わせるとよいのか考えて、証明にまとめる。

変数 x_1, \dots, x_n の完全 2 次式

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

を $x = (x_1, \dots, x_n)$ の二次形式 (quadratic form) という。二次形式の係数行列 $A = (a_{ij})$ は、対称性 $a_{ij} = a_{ji}$ を要求すれば一意に決まる。係数がすべて実数の二次形式を実二次形式 (real quadratic form) という。

問 26. 二次形式

$$Q(x, y, z) = xy - 2yz + 3z^2$$

の係数行列を求めよ。

命題 11.18. 与えられた実二次形式 $Q(x)$ に対して、直交行列 T を適当に選んで、変数変換 $X = Tx$ を行うと、

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j^2$$

とできる。ここで、 $\{\alpha_j\}$ は係数行列の固有値を表す。

系 11.19. 実二次形式 $Q(x)$ の係数行列 A が逆行列をもつとき、

- (i) A の全ての固有値が正数ならば、二次形式は正定値 (positive definite) と呼ばれ、 $Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \geq \alpha \|x\|^2$$

を満たす。ここで、 α は最小の固有値。

- (ii) A の全ての固有値が負数ならば、 $Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \leq \beta \|x\|^2$$

を満たす。ここで、 β は最大の固有値。

- (iii) それ以外の場合は、 $Q(x)$ は、 $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、原点を鞍点にもつ。

問 27. 上の問で与えた二次形式に変数変換を施し、その標準形を求めよ。

二次形式の標準形の応用例として、次の積分公式を挙げておく。

命題 11.20 (Gaussian Integral). 実二次形式 $Q(x)$ が正定値であるとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

問 28. 3重積分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2+xy+yz} dx dy dz$$

の値を求めよ。