

問題 1 は解答用紙の表に、問題 2 は裏に解答すること。

1 次のように定義された関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を考える。

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{if } 0 < x < 1/\pi, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- (i) 関数 f の不連続点に注意して、グラフの様子を描け。
- (ii) 連続関数列 f_n で f に各点収束するものを作れ。
- (iii) (ii) で作った関数列が一様収束するかどうか調べよ。

2 正数 $a > 0$ に対して、関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a e^{-x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める。

- (i) f_a の最大値 M_a を求めよ。
- (ii) 不等式 $f_a(x) \leq 2^a M_a e^{-x/2}$ ($x \geq 0$) を導け。
- (iii) 関数 f_a は可積分であることを示せ。