ルベーグ積分再入門

山上　滋

2007 年 6 月 20 日

目次

自然数の集合 $\mathbb{N}$ に 0 は含めないでおく。他に良く使われる集合の記号として、

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \mathbb{R} = \text{実数全体}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty], \quad \mathbb{C} = \text{複素数全体}.$$
$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad a_n \downarrow a, \quad a_n \uparrow a.$$

実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$[a < f < b] = \{x \in X; a < f(x) < b\}.$$

X が位相空間であるとき、

$$[f] = \overline{[f \neq 0]}, \quad [f \neq 0] = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$$

集合 X の部分集合 A に対して、その**表示関数** (indicator function) を次のように定義する。

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

∗印のついた項目は省略しても一通りのことが学べるようになっている（はずである)。

1　実数からリーマン積分へ

微積分をはじめとする解析学を深く理解しようと思ったならば実数の何たるかを避けて通ることはできないであろう。現代数学における実数の性質として重要なものは次の 3 つ。

- 加減乗除の代数演算。
- 大小関係に基づく順序構造。
- 極限に関する連続性（完備性）。

代数構造は、まあ良いであろう。順序構造に関連して、$a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ という記号を導入する。これは、いわゆる二項演算になっており、結合法則と交換法則をみたす。とくに、$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$ といったものが括弧のつけ方によらずに定まる。実際、

$$a_1 \vee \cdots \vee a_n = \max\{a_1, \ldots a_n\}, \quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \min\{a_1, \ldots a_n\}.$$

実数からなる集合 A を考える。それが有界であれば、その上下の限界点として上限・下限という 2 つの実数 $\sup A$, $\inf A$ が決まることは、「実数論」で学んだ。限界点が A に属していれば A の最大値・最小値という言い方ができるのであるが、そうでない場合も、実質的な最大値あるいは最小値という意味で、上限・下限が便利に使われる。

A が有界でない場合、例えば A が上に有界でなければ $\sup A$ は存在しないのであるが、その場合でも $\sup A = +\infty$ という量があたかもあるが如く扱えると何かと便利である。同様に、A が下に有界でなければ、$\inf A = -\infty$ と書くことにする。この $\pm\infty$ は、一見、有限の存在を超えたものではあるが、視覚的に認識することは容易である。例えば、$y = \arctan x$ のグラフを思い描いてみよ。そこでは、$x = \pm\infty$ が有限の境界点 $y = \pm\pi/2$ に対応することが見て取れるであろう。実数直線 $\mathbb{R}$ にこのような仮想的点を付け加えた集合を**拡大実数直線** (extended real line) と言って、$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ という記号で表わす。

まとめると、A が有界であるなしに関わらず $\sup A$, $\inf A$ が $\overline{\mathbb{R}}$ の元として定まるということである。次は、定義から明らか。

$$A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B), \quad \inf(A) \geq \inf(B).$$

この大小関係の対応を考慮して、$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$ と定める。

実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$\sup\{a_n; n \geq 1\} \geq \sup\{a_n; n \geq 2\} \geq \ldots$$

であるから、その極限値を $\limsup_{n\to\infty} a_n$ という記号で表わし、数列 $\{a_n\}$ の**上極限** (upper limit) と呼ぶ。同様に、**下極限** (lower limit) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ を極限値 $\lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}$ によって定める。これらも、$\overline{\mathbb{R}}$ の元として確定する。

命題 1.1. 実数列 $\{a_n\}$ に対して、$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ であり

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff \liminf_{n\to\infty} a_n = a = \limsup_{n\to\infty} \quad \text{for } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

一般に、実数列 $\{a_n\}$ で、$a_j \leq a_k$ $(j \leq k)$ であるものを**増加列** (increasing sequence)、$a_j \geq a_k$ $(j \leq k)$ であるものを**減少列** (decreasing sequence) という。増加列 $\{a_n\}$ の極限が a であるとき $a_n \uparrow a$ と書く。同様に、減少列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき、$a_n \downarrow a$ と書く。

注意．増加列・減少列の意味を「厳しく」とって、$a_j < a_k$ $(j < k)$ などを指すことに使い、上の意味での増加列を「非減少列」などと呼ぶことも多い（とくに欧州系の言語では）のであるが、論理的にいって好ましいとは思えない。似たようなものとして「非負」というのもあるが。

次に級数について考えよう。本質を把握するために、実数族 $\{a_i\}_{i\in I}$ を扱う。まずは、

$$\sum_{i\in I}|a_i| = \sup\{\sum_{i\in F}|a_i|; F \text{ は } I \text{ の有限部分集合 }\} \ \in \ [0,+\infty]$$

である。この値が有限である場合に、$\{a_i\}_{i\in I}$ は**総和可能** (summable) であると言う。総和可能である場合に、その**総和** (sum) を

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i \vee 0 - \sum_{i\in I}(-a_i)\vee 0 \ \in \ \mathbb{R}$$

と定義する。

総和可能である場合には、総和の結果は和をとる順序によらない。添え字集合 I が

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$$

と分割されているならば、各 $j \in J$ ごとに、$\{a_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能で、さらに $\{\sum_{i\in I_j} a_i\}_{j\in J}$ も総和可能となり、次の分割和公式が成り立つ。

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right).$$

問 1. $\sum_{i\in I}|a_i| < +\infty$ であるならば、$\{i \in I; a_i \neq 0\}$ は可算集合である。これを確かめよ。仮に可算集合だけを扱うにしても、表示の自由度を確保しておくことは意味がある。例えば、二重級数の和とか。

絶対収束級数は総和を表わすのであるが、条件収束級数は和というよりも数列の極限と理解すべきである。

ここで、いわゆるリーマン積分の復習をしておこう。（以下で必要となるのは、連続関数の場合であるから、コーシーの積分と言った方が正確かも知れない。）有限区間 $[a,b]$ の上で定義された関数の定積分について考える。まず、区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して、その細かさ (mesh) を $|\Delta| = \min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ で定める。そして

$$\overline{f}_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \underline{f}_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

とし、次なる量を考える。

$$\overline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{f}_i(x_i - x_{i-1}), \qquad \underline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{f}_i(x_i - x_{i-1}).$$

補題 1.2. Δ を Δ', Δ'' の細分割とすると、

$$\underline{S}(f,\Delta') \leq \underline{S}(f,\Delta) \leq \overline{S}(f,\Delta) \leq \overline{S}(f,\Delta'').$$

そこで、

$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f,\Delta); \Delta\}, \qquad \underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f,\Delta); \Delta\}$$

とおいて Darboux の**上積分・下積分** (upper and lower integrals) と呼ぶ。不等式 $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ が常に成り立つことに注意する。

定義 1.3. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が、$\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ なる条件を満たすとき、リーマン積分可能であるといい、この共通の値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

という記号で表わし、関数 f の**リーマン積分** (Riemannian integral) という。

注意．上の定義は、Riemann が与えた定義 (1857) の Darboux による言い換え (1875) である。しかしながら、リーマンの与えた定義は、実質的にはコーシーによるものなので、コーシー・リーマン積分とでも呼ぶべきものではある。

同様の考え方は、2 次元以上の場合にも有効で、矩形領域上のリーマン重積分の定義に到達する。

Riemann による積分可能条件の分析はそれなりにややこしく、後ほど展開するルベーグ積分論に吸収されてしまうことを思えば、この段階で深入りするのは得策ではない。以下のアプローチで必要なのは、関数 f が連続関数の場合であるので、その結果を先取りしてここで述べておこう。

定理 1.4. 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は、リーマン積分可能で、次が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}).$$

リーマン積分自体は、変域も値域も有界である場合に意味をもつ概念であるが、さすがにそれだけでは何かと不便でもあり、有界な場合からの極限として**広義積分** (improper integral) なるものも併用される。後ほど検討するルベーグ積分においては、この広義積分の中で「絶対収束」する場合、すなわち、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty$$

である場合、通常の積分と同等に扱うのが自然である。

一方で、1 変数積分においては、$\int_0^\infty |f(x)|\,dx = +\infty$ かつ

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx$$

が存在するといった状況にも、しばしば遭遇することになるのだが、この場合の広義積分は、上の絶対収束する場合と概念的に区別されるべきものである。

例 1.5. (i) 良い広義積分（普通に積分と呼ぶべきもの）と (ii) 悪い広義積分（普通の意味での積分とは見なし難いもの）の例。

(i)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx.$$

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1 + x}\,dx.$$

2 連続関数

次の定理は実数の連続性と同等の内容のもので、その証明の要点は、「無限部屋割り論法」（絞り出し論法）にある。

定理 2.1 (Bolzano). 有界実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は収束する部分列を取り出すことができる。ここで部分列とは、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への強増加関数 $k \mapsto n_k$ を使って、$\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ と表わされる数列のこと。

系 2.2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K は、次の性質をもつ：K 内の点列は、K の点に収束する部分列を含む。

ここでユークリッド空間の位相について復習しておこう。点（あるいはベクトル） $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、そのユークリッド・ノルムを

$$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$

で定める。したがって、二点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ の距離は、$d(x,y) = |x-y|$ で与えられる。この距離によって、$\mathbb{R}^n$ の点列の収束が意味をもつ：$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x \iff \lim_{n\to\infty} |x^{(n)} - x| = 0.$

さて、

$$B_r(a) = \{x \in X; d(x,a) < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in X; d(x,a) \leq r\}$$

によって $a \in \mathbb{R}^n$ を中心とした半径 $r > 0$ の**開球** (open ball) と**閉球** (closed ball) を表わす。

部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が**開集合** (open set) であるとは、

$$\forall a \in U, \exists r > 0, B_r(a) \subset U$$

となること。また部分集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して、その**閉包** (closure) を

$$\overline{F} = \{a \in \mathbb{R}^n; \forall r > 0, B_r(a) \cap F \neq \emptyset\}$$

によって定める。部分集合は $\overline{F} = F$ であるとき、**閉集合** (closed set) と呼ばれる。開集合の補集合は閉集合であり、閉集合の補集合は開集合であることが示される。

部分集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ が**有界** (bounded) であるとは、$\exists a \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0, B \subset B_r(a)$ となること。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X の上で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**連続** (continuous) であるとは、$\forall x \in X$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $y \in B_\delta(x) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$、となること。

連続関数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ と連続関数 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して、合成関数 $\Phi(f,g) : x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$ も連続であるから、

$$f + g, \quad fg, \quad f \vee g, \quad f \wedge g$$

は連続関数。

問 2. 関数 $(a,b) \mapsto a \vee b, a \wedge b$ が連続であることを確かめよ。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X の上で定義された関数 f の**台**あるいは**支持集合** (support) を、$[f] \equiv \overline{[f \neq 0]}$ で定義する。定義により支持集合は閉集合であり、$f(x) = 0$ $(x \in X \setminus [f])$ をみたす。次の包含関係がなりたつ。

$$[f+g] \cup [f \vee g] \cup [f \wedge g] \subset [f] \cup [g], \quad [fg] \subset [f] \cap [g].$$

問 3. (i) 支持集合について、上の包含関係を確かめよ。
(ii) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f, g で $[fg] \neq [f] \cap [g]$ となる例を作れ。

問 4. f の支持集合は、$f(x) = 0$ $(x \notin F)$ となる最小の閉集合 F に一致する。

部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して、X 上の実数値連続関数で、その支持集合が X に含まれる有界閉集合であるもの全体の集合を $C_c(X)$ という記号で表わす。$C_c(X)$ はベクトル空間であり、

$$f, g \in C_c(X) \Longrightarrow f \vee g, f \wedge g, fg \in C_c(X)$$

という性質をもっている。

注意 . C_c の C は Continuous を、c は compact を表わしている。

定義 2.3. $X \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と正数 $\delta > 0$ に対して、f の**一様連続度** (the degree of uniform continuity) を

$$C_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; d(x, y) \leq \delta\}$$

で定義する。

問 5. 微分可能関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、$M = \sup\{|f'(x)|; x \in \mathbb{R}\}$ とおくと、$C_f(\delta) \leq M\delta$.

定理 2.4 (H.Heine). 有界閉集合上の連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について、

$$\lim_{\delta \to 0} C_f(\delta) = 0.$$

この性質を**一様連続性** (uniform continuity) という。

Proof. 一様連続性を否定すると、

$$\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, y \in X, d(x, y) \leq \delta, |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

とくに、$\delta = 1/n$ と取ると、

$$\exists x_n, y_n \in X, d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

そこで、部分列 $\{x_{n'}\}_{n \geq 1}$ を $x_{n'} \to a$ であるように選ぶと、$y_{n'} \to a$ である。そうすると、f の連続性により

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{n'}) = f(a) = \lim_{n \to \infty} f(y_{n'})$$

であるが、これは $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \epsilon$ に反する。 □

問 6. $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数で一様連続でないものを１つ挙げよ。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の**直方体** (rectangular solid) $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ を細分割して、連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ の一様連続度を抑えることで、リーマン積分

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

の存在がわかる。実際、$[a, b]$ の分割 Δ に対して、

$$\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \leq C_f(|\Delta|)\, (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

という不等式が成り立つ。

問 7. * 直方体 $[a,b]$ の分割 Δ およびその細かさ $|\Delta|$ の定義を与えよ。

関数 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対しては、その支持集合 $[f]$ を含む十分大きい直方体 $[a,b]$ を用意して

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

とおくと、これは $[a,b]$ の取り方によらない。次が成り立つ。

(i) $C_c(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ は線型である。

(ii) $f \geq 0$ ならば $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \geq 0.$

(iii) $y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

(iv) 正則一次変換 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\,dx = \frac{1}{|\det(T)|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

問 8. * 閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ の上で定義された増加関数 $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を用意する。連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して、極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1})) = \int_a^b f(t)d\Phi(t)$$

が存在することを示せ。この極限値を右辺のように書いて **Stieltjes 積分**と呼ぶ。

集合 X 上で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ および関数列 $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ について、

$$\forall x \in X,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

であるとき、f_n は f に**各点収束する** (converge point-wise) という。各点収束のことを単に収束とも言う。また f を関数列 $\{f_n\}$ の**極限関数** (limit function) という。関数列 $\{f_n\}$ が増加列（減少列）であるとは、すべての x で、$\{f_n(x)\}$ が増加列（減少列）であること。増加列と減少列をまとめて**単調列** (monotone sequence) という。増加列 $\{f_n\}$ が関数 f に収束するとき、$f_n \uparrow f$ という記号で表わす。同様に $f_n \downarrow f$ は、$\{f_n\}$ が減少列でその極限関数が f であることを意味する。

関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\} \in [0, +\infty]$$

とおく。関数 f の有界性は $\|f\|_\infty < +\infty$ と記述できる。関数列 f_n が関数 f に**一様収束する** (converge uniformly) とは、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となること。$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ であるから、一様収束するならば各点収束する。

一様収束の概念はリーマン積分と相性が良い。逆に言うと、一様収束でない場合は、積分と極限の順序交換に注意を要するということでもある。

注意．記号 $\|\ \|_\infty$ の ∞ は、

$$\lim_{p\to+\infty} (|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p} = |a_1| \vee \cdots \vee |a_n|$$

に由来する。

命題 2.5. 積分の基本不等式：リーマン積分可能な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \leq (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)\,\|f\|_\infty.$$

系 2.6. $f_n \to f$ (uniformly) のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

定理 2.7. $^*X \subset \mathbb{R}^n$ の上で定義された連続関数列 f_n が一様収束するならば、その極限関数は連続である。

例 2.8. 連続関数の押し付け極限とその積分。

定理 2.9 (Dini). 有界閉集合 K の上で定義された連続関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が、$\forall x \in K$, $f_n(x) \downarrow 0$ を満たすならば、$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ である。

Proof. 仮に $\|f_n\|_\infty \to 0$ でないとすると、

$$\exists r > 0, \forall N \geq 1, \exists n \geq N, \|f_n\|_\infty > r.$$

とくに、$n_1 < n_2 < \dots$ で $\|f_{n_j}\|_\infty > r$ $(j \geq 1)$ となるものが存在する。このとき、条件 $\|f_{n_j}\|_\infty > r$ から、$\exists x_j \in X$, $f_{n_j}(x_j) > r$ である。そこで、部分列 $\{x_{j'}\}_{j\geq 1}$ を $x_{j'} \to x \in X$ であるように取って矛盾を導こう。

各 $m \geq 1$ に対して、$j \geq 1$ を $n_{j'} \geq m$ を満すように限定しておくと、

$$f_m(x) = f_m(x) - f_m(x_{n'}) + f_m(x_{n'}) \geq f_m(x) - f_m(x_{j'}) + f_{n_{j'}}(x_{j'}) > f_m(x) - f_m(x_{j'}) + r.$$

ここで、f_m は連続関数であり $x_{j'} \to x$ $(j \to \infty)$ に注意して極限を取ると $f_m(x) \geq r$ を得る。これが全ての $m \geq 1$ について成り立つから矛盾である。 □

系 2.10. 支持集合が有界閉集合であるような連続関数の列 $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が、$f_n \downarrow 0$ を満たせば、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n(x)\,dx = 0.$$

3 ベクトル束と積分

集合 X の上で定義された実数値関数の作る実ベクトル空間 L で

$$f, g \in L \implies f \vee g, f \wedge g \in L$$

という性質をもつものを X 上の**ベクトル束** (vector lattice) という。

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

ベクトル束 L に対して、

$$L^+ = \{f \in L; f \geq 0\}$$

とおく。

例 3.1.

(i) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数で支持集合が有界閉集合であるもの全体 $C_c(\mathbb{R}^n)$.

(ii) * 集合 X 上の関数 f で $[f \neq 0]$ が有限集合であるもの全体 L.

(iii) * 球面 $S^n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_0)^2 + (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1\}$ 上の連続関数全体 $C(S^n)$.

問 9. 次を確認。

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0 \in L.$$

とくに、$L = L^+ - L^+$ である。

問 10. 集合 X 上の実数値関数の作る実ベクトル空間 L に対して、次は同値。
(i) L はベクトル束である。(ii) $f \in L$ ならば、$f \vee 0 \in L$. (iii) $f \in L$ ならば、$|f| \in L$.

定義 3.2. ベクトル束 L 上の汎関数 $I : L \to \mathbb{R}$ で、次の条件を満たすものを L 上の**ダニエル積分** (Daniell integral) あるいは単に**積分**と呼ぶ。

(i) [Linearity] $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L$.

(ii) [Positivity] $f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$.

(iii) [Continuity] $f_n \downarrow 0 \Longrightarrow I(f_n) \downarrow 0$.

ベクトル束 L とその上の積分 I の組 (L, I) を**積分系** (integration system) と呼ぶ。

例 3.3. 以下の例で、積分の「連続性」は、いずれの場合も Dini の定理と正線型性からの帰結である。

(i) 連続関数 $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ が与えられたとき、$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho(x)\, dx$$

は、$C_c(\mathbb{R}^n)$ 上の積分を定める。$\rho \equiv 1$ の場合をリーマン積分系と呼ぶことにする。これは、コーシー積分系と呼ぶのが正統ではあろうが。

(ii) * $L = \{f : X \to \mathbb{R}; [f \neq 0]$ は有限集合 $\}$ 上の積分を

$$I(f) = \sum_{x \in X} f(x)$$

で定めることができる。

(iii) * $L = C(S^n)$ 上の積分をリーマン積分

$$I(f) = \int_{0<|x|\leq 1} f\left(\frac{x}{|x|}\right) dx$$

で定めることができる。

問 11. * 増加関数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、$L = C_c(\mathbb{R})$ 上の積分を Stieltjes 積分により

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\Phi(t)$$

と定めることができることを確認。

問 12. 正値性から次が従うことを確認。

$$f \geq g \Longrightarrow I(f) \geq I(g).$$

問 13. 連続性から次が従うことを確認。

$$f_n \uparrow f \Longrightarrow I(f_n) \uparrow I(f).$$

問 14. * 積分の連続性は次の条件と同値である。L^+ における関数 f と 関数列 $\{h_n\}_{n\geq 1}$ に対して、

$$f \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n \implies I(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n)$$

（和 $\sum_n h_n$ が L に属することは**仮定しない**）を示せ。

定義 3.4. 集合 X 上のベクトル束 L に対して、

$$\begin{aligned} L_\uparrow &= \{f : X \to (-\infty, +\infty]; \exists\, \text{a sequence} f_n \in L, f_n \uparrow f\}, \\ L_\downarrow &= \{f : X \to [-\infty, +\infty); \exists\, \text{a sequence} f_n \in L, f_n \downarrow f\} \end{aligned}$$

とおく。また、次の記号もよく使われる。

$$L_\uparrow^+ = \{f \in L_\uparrow; f \geq 0\}.$$

命題 3.5.

(i) $L_\downarrow = -L_\uparrow$ かつ $L \subset L_\uparrow \cap L_\downarrow$.

(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ f, g \in L_\uparrow \Longrightarrow \alpha f + \beta g, f \vee g, f \wedge g \in L_\uparrow$.

(iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ f, g \in L_\downarrow \Longrightarrow \alpha f + \beta g, f \vee g, f \wedge g \in L_\downarrow$.

注意 .

(i) $f(x) = \pm\infty$ となる場合も含めて、$0f(x) = 0$ と定める。左辺の 0 は極限ということではなく、完全な 0 という意味で。

(ii) $L_\uparrow$ あるいは $L_\downarrow$ の定義で、関数の値に $\pm\infty$ を許すことは、最初、奇異に見えるかも知れないが、このように広げておくのが後々便利なのである。

問 15. 上の命題の主張を確認。

例 3.6. ベクトル束 $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ を考える。部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ について、
(i) $1_A \in L_\uparrow \iff A$ は開集合、(ii) $1_A \in L_\downarrow \iff A$ は閉集合。

問 16. 関数 $f(x) = x/(x^2+1)$ は $C_c(\mathbb{R})_\uparrow$ にも $C_c(\mathbb{R})_\downarrow$ にも属さないことを確認。

補題 3.7. ベクトル束 L における増加列 f_n, g_n に対して、極限関数が不等式

$$\lim_n f_n \leq \lim_n g$$

を満たせば（$\lim_n f_n$, $\lim_n g_n$ が L に属することは仮定しない）、

$$\lim_n I(f_n) \leq \lim_n I(g_n)$$

が成り立つ。

Proof. 仮定から、$f_m \le \lim_{n\to\infty} g_n$ であり、したがって $f_m = \lim_{n\to\infty} f_m \wedge g_n$. 積分の連続性を $(f_m - f_m \wedge g_n \downarrow 0)$ に適用して、

$$I(f_m) = \lim_{n\to\infty} I(f_m \wedge g_n) \le \lim_{n\to\infty} I(g_n).$$

最後に、m についての極限を取れば良い。 □

定義 3.8. 汎関数 $I_\uparrow : L_\uparrow \to (-\infty, +\infty]$ を

$$I_\uparrow(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \quad f_n \uparrow f,\ f_n \in L$$

で定義することができる。同様に、$I_\downarrow : L_\downarrow \to [-\infty, +\infty)$ を

$$I_\downarrow(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \quad f_n \downarrow f,\ f_n \in L$$

で定める。

問 17. 補題を使って、上の定義が「意味をもつ」(well-defined) ことを確認。

例 3.9. $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ において通常の積分 I を考えるとき、

$$I_\uparrow(1_{(a,b)}) = (b_1 - a_1)\dots(b_n - a_n) = I_\downarrow(1_{[a,b]}).$$

ここで、$(a,b) = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$, $[a,b] = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ である。

問 18. * 増加関数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随した Stieltjes 積分 $I : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ について、

$$I_\uparrow(1_{(a,b)}) = \Phi(b-0) - \Phi(a+0), \qquad I_\downarrow(1_{[a,b]}) = \Phi(b+0) - \Phi(a-0).$$

命題 3.10.

(i) $I_\downarrow(-f) = -I_\uparrow(f)$ for $f \in L_\uparrow$ ($-L_\uparrow = L_\downarrow$ に注意)。
(ii) 汎関数 $I_\uparrow$, $I_\downarrow$ は I の拡張になっている。すなわち、$f \in L$ に対して $L_\uparrow(f) = I(f) = I_\downarrow(f)$. とくに、$I_\uparrow(0) = I_\downarrow(0) = 0$ である。
(iii) 汎関数 $I_\uparrow$, $I_\downarrow$ は、半線型である。すなわち、$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$、$f, g \in L_\uparrow$ （または $f, g \in L_\downarrow$）に対して、

$$I_\uparrow(\alpha f + \beta g) = \alpha I_\uparrow(f) + \beta I_\uparrow(g)$$

（または $I_\uparrow$ を $I_\downarrow$ で置き換えた等式が成り立つ)。
(iv) $f, g \in L_\uparrow$, $f \le g$ ならば $I_\uparrow(f) \le I_\uparrow(g)$.

Proof. (iv) は、$f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$ のとき $f_n \vee g_n \uparrow f \vee g = g$ に注意する。 □

補題 3.11 (単調連続性).

(i) $L_\uparrow$ における増加列 f_n に対して、その極限関数 f も $L_\uparrow$ に属し $I_\uparrow(f_n) \uparrow I_\uparrow(f)$ が成り立つ。
(ii) $L_\downarrow$ における減少列 f_n に対して、その極限関数 f も $L_\downarrow$ に属し $I_\downarrow(f_n) \downarrow I_\downarrow(f)$ が成り立つ。

Proof. (i) を示す。各 $f_n \in L_\downarrow$ に対して、$\{f_{n,m}\}_{m\ge1}$ を $f_{n,m} \uparrow f_n$ と取る。これだけでは、$\{f_{n,m}\}_{n\ge1}$ の間の単調性が保証されないので、次のように「押し上げ」る。

$$g_{n,m} = f_{1,m} \vee f_{2,m} \vee \cdots \vee f_{n,m}.$$

ただし、$g_{1,m} = f_{1,m}$ とおく。明らかに、$g_{n,m}$ は n について単調増加であり、$f_{n,m}$ は m について単調増加に選んであるので、$g_{n,m}$ は m についても単調増加である。のみならず、

$$f_{n,m} \leq g_{n,m} \leq f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n = f_n$$

であるから、各 n に対して、$g_{n,m} \uparrow f_n$ である。

これだけの準備工作をしておいて、対角線 $\{g_{n,n}\}_{n\geq 1}$ を考えると、$g_{n,n} \in L$ かつ $g_{n,n} \uparrow$ であり、不等式

$$f_{n,m} \leq g_{n,m} \leq g_{m,m} \leq f_m, \quad m \geq n$$

において極限 $m \to \infty$ を取ると、

$$f_n \leq \lim_{m\to\infty} g_{m,m} \leq f$$

を得るので、さらに極限 $n \to \infty$ を取って、

$$f = \lim_{m\to\infty} g_{m,m} \in L_\uparrow$$

がわかる。

また、積分を施した、

$$I(f_{n,m}) \leq I(g_{m,m}) \leq I_\uparrow(f_m), \quad m \geq n$$

において極限 $m \to \infty$ を取ると、

$$I_\uparrow(f_n) \leq I_\uparrow(f) \leq \lim_{m\to\infty} I_\uparrow(f_m)$$

が導かれ、さらに極限 $n \to \infty$ を取ると、

$$\lim_{n\to\infty} I_\uparrow(f_n) = I_\uparrow(f)$$

が分かる。 □

系 3.12. 関数列 $f_n \in L_\uparrow^+$ に対して、$\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n \in L_\uparrow^+$ かつ $\displaystyle I_\uparrow\left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) = \sum_{n\geq 1} I_\uparrow(f_n).$

Proof. この系は、積分の収束定理の核となる部分であるので（収束定理の本質は総和法にあり）、次の直接証明も与えておこう。まず、定義から分かる次の言い換えに注意する。関数 f に対して $f \in L_\uparrow^+$ であるための必要十分条件は、関数列 $\{f_n \in L^+\}_{n\geq 1}$ が存在して

$$f = \sum_{n=1}^\infty f_n$$

と書けること。また、このとき

$$I_\uparrow(f) = \sum_{n=1}^\infty I(f_n)$$

である。

この注意から、関数列 $\{f_{n,m} \in L^+\}$ を取ってきて $f_n = \sum_m f_{n,m}$ と表示すると、$I_\uparrow(f_n) = \sum_m I(f_{n,m})$ である。再び上の注意により、$\sum_n f_n = \sum_{m,n} f_{n,m} \in L_\uparrow^+$ であり、

$$I_\uparrow\left(\sum_n f_n\right) = \sum_{m,n} I(f_{n,m}) = \sum_n \left(\sum_m I(f_{n,m})\right) = \sum_n I_\uparrow(f_n)$$

が分かる。 □

例 3.13. $L = C_c(\mathbb{R})$ の場合。$\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\geq 1}$ と並べておいて、$\epsilon > 0$ に対して

$$A = \bigcup_{n\geq 1}(q_n - \epsilon/2^n, q_n + \epsilon/2^n)$$

とおくと、これは $\mathbb{R}$ の開集合であり、したがって $1_A \in L_\uparrow$. さらに、

$$1_A \leq \sum_{n\geq 1} 1_{(q_n-\epsilon/2^n, q_n+\epsilon/2^n)}$$

より、

$$I_\uparrow(1_A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^n} = 2\epsilon$$

である。この意味を良く考えてみる。

4 可積分関数と積分の延長

定義 4.1. 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して、その**上積分** (upper integral) および**下積分** (lower integral) を

$$\overline{I}(f) = \inf\{I_\uparrow(g); g \in L_\uparrow, f \leq g\}, \qquad \underline{I}(f) = \sup\{I_\downarrow(g); g \in L_\downarrow, g \leq f\}$$

で定める。これらは、拡大実数直線 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ の元である。$\inf(\emptyset) = +\infty$, $\sup(\emptyset) = -\infty$ に注意。例えば $f \leq g$ となる $g \in L_\uparrow$ が存在しないときは、$\overline{I}(f) = +\infty$.

例 4.2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の表示関数 $1_\mathbb{Q}$ を Dirichlet 関数と言う。$\overline{I}(1_\mathbb{Q}) = 0$ である。

問 19. (i) $1_\mathbb{Q}(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos(\pi m!x))^{2n}$ を示せ。

(ii) Darboux の上積分・下積分について、$\underline{S}(1_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}) = 0$, $\overline{S}(1_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}) = b - a$ を示せ。

命題 4.3.

(i) $\underline{I}(f) = -\overline{I}(-f)$ for any f.

(ii) $\overline{I}(\lambda f) = \lambda\overline{I}(f)$ for $0 \leq \lambda < +\infty$. とくに、$\overline{I}(0) = 0$ である。

(iii) $f \leq g$ ならば $\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$.

(iv) 和 $f + g$ が定義できるとき、すなわち $f(x) = \pm\infty$ かつ $g(x) = \mp\infty$ となる $x \in X$ が存在しないとき、$\overline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$.

(v) $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

(vi) $f \in L_\uparrow \cup L_\downarrow$ ならば $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. この値は、$f \in L_\uparrow$ あるいは $f \in L_\downarrow$ に応じて $I_\uparrow(f)$ あるいは $I_\downarrow(f)$ に一致する。

Proof. (i)–(iv) は定義からすぐわかる。

(v) は (iv) で $g = -f$ とおいて、(i) と (ii) の特別な場合である $\overline{I}(0) = 0$ を使う。

(vi) は、まず $\overline{I}(f) = I_\uparrow(f)$ ($f \in L_\uparrow$)、$\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ ($f \in L_\downarrow$) に注意する。とくに、$f \in L$ に対して、$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$.

さて、改めて $f \in L_\uparrow$ とすると、$f_n \uparrow f$ であるような $f_n \in L$ が取れるので、

$$I_\uparrow(f) = \lim_n I(f_n) = \lim_n \underline{I}(f_n) \leq \underline{I}(f).$$

一方、$f \in L_\uparrow$ に対して、$\overline{I}(f) = I_\uparrow(f)$ は上で見たとおり。よって、$\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. □

問 20. (i)–(iv) を確かめよ。

定義 4.4. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**ルベーグ可積分**(Lebesgue integrable) あるいは単に**可積分**であるとは、$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$ となること（上下積分が一致し有限の値であること）。可積分関数全体の集合を $\mathbf{L^1}$ という記号で表わす。また、$f \in L^1$ に対して、$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$ を出発点となった積分の記号を流用して $I(f)$ と書く。（違いを強調する場合には、I^1 とも書く。）このようにしても問題ないことは、命題 3.10 (ii) と命題 4.3 (vi) が保証してくれる。n-次元リーマン積分系に対する L^1 を $L^1(\mathbb{R}^n)$ と書く。

問 21. 有限区間 $[a,b]$ の上で定義された関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であれば、ルベーグ可積分であり、次が成り立つ。

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

ヒント：$\forall \epsilon > 0,\ \underline{S}(f) - \epsilon \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f) + \epsilon.$

問 22. 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ と $g \in L^1$ に対して、$\overline{f}(f+g) = \overline{I}(f) + I(g)$ である。

補題 4.5. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が可積分であるための必要十分条件は、

$$\forall \epsilon,\ \exists f_\uparrow \in L_\uparrow,\ \exists f_\downarrow \in L_\downarrow, \quad f_\downarrow \leq f \leq f_\uparrow,\ I_\uparrow(f_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow) \leq \epsilon.$$

このとき、$f_\downarrow \leq f \leq f_\uparrow$ を維持したまま、$I_\uparrow(f_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow) = I_\uparrow(f_\uparrow - f_\downarrow) \geq 0$ が 0 に近づくように $f_{\uparrow\downarrow}$ が増減するならば、

$$I_\downarrow(f_\downarrow) \uparrow I(f), \quad I_\uparrow(f_\uparrow) \downarrow I(f).$$

Proof. 不等式 $I_\downarrow(f_\downarrow) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq I_\uparrow(f_\uparrow)$ による。 □

定理 4.6.

(i) L^1 は X 上のベクトル束で、$L_\uparrow \cap L_\downarrow$ を含む。
(ii) $I : L^1 \to \mathbb{R}$ は正線型汎関数で、$I(f) = I_\uparrow(f) = I_\downarrow(f)$ $(f \in L_\uparrow \cap L_\downarrow)$. とくに、汎関数 $I : L^1 \to \mathbb{R}$ は積分 $I : L \to \mathbb{R}$ の拡張になっている。

Proof. $f, g \in L^1$ とし、$f_\uparrow, g_\uparrow \in L_\uparrow$ および $f_\downarrow, g_\downarrow \in L_\downarrow$ は $f_\downarrow \leq f \leq f_\uparrow$, $g_\downarrow \leq g \leq g_\uparrow$ をみたすとする。このとき、$f_\downarrow + g_\downarrow \leq f + g \leq f_\uparrow + g_\uparrow$ であり、

$$I_\uparrow(f_\uparrow + g_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow + g_\downarrow) = (I_\uparrow(f_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow)) + (I_\uparrow(g_\uparrow) - I_\downarrow(g_\downarrow))$$

は任意に小さくできる。すなわち、$f + g \in L^1$ で $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

次に、$\lambda > 0$ とすると、$\lambda f_\downarrow \leq \lambda f \leq \lambda f_\uparrow$ に注意して、

$$I_\uparrow(\lambda f_\uparrow) - I_\downarrow(\lambda f_\downarrow) = \lambda(I_\uparrow(f_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow))$$

を小さくできる。すなわち、$\lambda f \in L^1$ で $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

さらに、$-f_\uparrow \leq -f \leq -f_\downarrow$ $(-f_\uparrow \in L_\downarrow,\ -f_\downarrow \in L_\uparrow)$ に注意して、

$$I_\uparrow(-f_\downarrow) - I_\downarrow(-f_\uparrow) = I_\uparrow(f_\uparrow) - I_\downarrow(f_\downarrow)$$

も小さい。すなわち、$-f \in L^1$ で $I(-f) = -I(f)$.

以上により、L^1 はベクトル空間で、I はその上の線型汎関数であることがわかった。

L^1 が束演算で閉じていることは、$f \in L^1 \Longrightarrow f \vee 0 \in L^1$ を確かめればよい。これは、$f_\downarrow \vee 0 \le f \vee 0 \le f_\uparrow \vee 0$ より、不等式

$$0 \le f_\uparrow \vee 0 - f_\downarrow \vee 0 \le f_\uparrow - f_\downarrow$$

に注意して、

$$0 \le I_\uparrow(f_\uparrow \vee 0) - I_\downarrow(f_\downarrow \vee 0) = I_\uparrow(f_\uparrow \vee 0 - f_\downarrow \vee 0) \le I_\uparrow(f_\uparrow - f_\downarrow)$$

を小さくする。 とくに $f \ge 0$ のときは、$I(f) = I(f \vee 0)$ は、$I_\uparrow(f_\uparrow \vee 0) \ge 0$ の極限として $I(f) \ge 0$ である。

最後に、$f \in L_\uparrow \cap L_\downarrow$ とすると、$f_\downarrow \le f \le f_\uparrow$ となる $f_{\uparrow\downarrow} \in L$ が存在するので、これと命題 4.3 (vi) から $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in [I(f_\downarrow), I(f_\uparrow)]$ が有限であるとわかる。 □

例 4.7. 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が、

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} |f(t)|\, dt < +\infty$$

をみたすならば、$f \in L^1$ であり、

$$I(f) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\, dt$$

となる。これは良い広義積分の例である。これを確かめるためには、$f \ge 0$ としてよく、このとき、$f_n \uparrow f$ となる $f_n \in C_c(\mathbb{R})^+$ を $f_n(t) = f(t)$ $(|t| \le R_n)$ かつ

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dt - \int_{-R_n}^{R_n} f(t)\, dt \right| \le \frac{1}{n}$$

と取れば良い。

一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \equiv \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$$

はルベーグ可積分でない例となっている。条件収束級数に相当する広義積分である。

問 23. 正数 $\alpha > 0$ について、積分

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) dt$$

が可積分であるかどうか調べよ。

問 24. * 次を示せ。

$$\forall \epsilon > 0, \forall f \in L^1, \exists g \in L, I(|f - g|) \le \epsilon.$$

定理 4.8. 集合 X 上の積分系 (L, I), 集合 Y 上の積分系 (M, J) および写像 $\phi : X \to Y$ があって、$M \circ \phi \subset L$ かつ $I(f \circ \phi) = J(f)$ $(f \in M)$ を満たすとする。このとき、$M^1 \circ \phi \subset L^1$ であり $I(f \circ \phi) = J(f)$ $(f \in M^1)$ となる。

Proof. $M_\uparrow \circ \phi \subset L_\uparrow$, $I_\uparrow(f \circ \phi) = J_\uparrow$ といったことを一歩一歩確かめていくだけである。 □

系 4.9.

(i) $\phi : X \to Y$ が全単射で $L = M \circ \phi$ であるとき、$L^1 = M^1 \circ \phi$ および $I(f) = J(f \circ \phi)$ $(f \in M^1)$ が成り立つ。

(ii) 集合 X 上の積分系 (L, I), (M, J) が $L \subset M$, $J|_L = I$ を満たすとき、すなわち、(M, J) が (L, I) の拡張になっているとき、$L^1 \subset M^1$ であり、M^1 上の積分を L^1 に制限したものは I に一致する。

例 4.10. 開集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $C_c(A) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ と思って得られる積分系に付随するものを $L^1(A)$ と書くと、$L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ であり、$L^1(A)$ 上の積分は $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上のそれの制限になっている。

とくに、1 次元の場合、$A = (a, b)$ に対して、

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) 1_A(x)\, dx$$

である。

注意．§8 で、より一般の集合 A に対しての積分

$$\int_A f(x)\, dx = \int f(x) 1_A(x)\, dx$$

を導入する。

例 4.11. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x + y)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

問 25. 関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と正数 $\lambda > 0$ について、等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\, dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

を吟味する。

5 積分の収束定理

補題 5.1 (subadditivity of upper integrals). 関数 $f : X \to [0, +\infty]$ が、$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $(f_n \geq 0)$ と表示されるとき、

$$\overline{I}(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{I}(f_n).$$

Proof. $\overline{I}(f_n) = +\infty$ となる n があれば、上の不等式は自明となる。そこで、$\overline{I}(f_n) < +\infty$ $(n \geq 1)$ とする。任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して、$g_n \in L_\uparrow^+$ を

$$f_n \leq g_n, \quad I(g_n) = I_\uparrow(g_n) \leq \overline{I}(f_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

であるように選ぶと、$f \leq \sum_n g_n$ である。ここで、系 3.12 から分かる $\sum_n g_n \in L_\uparrow^+$ および $I_\uparrow(\sum_n g_n) = \sum_n I_\uparrow(g_n)$ に注意すれば、

$$\overline{I}(f) \leq I_\uparrow\left(\sum_n g_n\right) = \sum_n I_\uparrow(g_n) \leq \sum_n \overline{I}(f_n) + \sum_n \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_n \overline{I}(f_n) + \epsilon$$

となって、めでたい。 □

定理 5.2 (Monotone Convergence Theorem). 可積分関数からなる増加列 $f_n \in L^1$ の極限になっている関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を考えるとき、f が可積分であるための必要十分条件は、$\lim_{n\to\infty} I(f_n) < +\infty$ となることである。このとき、さらに次が成り立つ。

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

Proof. $I(f_n) = \overline{I}(f_n) \leq \overline{I}(f)$ ゆえ、$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = +\infty$ ならば、$\overline{I}(f) = +\infty$ となるので、$f \notin L^1$.

そこで、$\lim_{n\to\infty} I(f_n) < +\infty$ とする。$f - f_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$ ゆえ、上の補題により、

$$\overline{I}(f - f_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{I}(f_n - f_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n - f_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(I(f_n) - I(f_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) - I(f_0).$$

これから

$$\overline{I}(f) \leq \overline{I}(f_0) + \overline{I}(f - f_0) = I(f_0) + \overline{I}(f - f_0) \leq \lim_n I(f_n)$$

が分かる。一方、$f_n \leq f$ および $f_n \in L^1$ から従う不等式

$$I(f_n) = \underline{I}(f_n) \leq \underline{I}(f)$$

において極限を取れば、

$$\lim_n I(f_n) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \lim_n I(f_n)$$

となって、めでたい。 □

系 5.3. 正線型汎関数 I は、L^1 で「連続」である。すなわち、減少列 $f_n \in L^1$ が $f_n \downarrow 0$ を満たせば、$I(f_n) \downarrow 0$. 結論として (L, I) の拡大としての積分系 (L^1, I) を得る。

定理 5.4 (Dominated Convergence Theorem). 関数列 $f_n \in L^1$ と関数 $g \in L^1$ が $|f_n| \leq g$ $(n \geq 1)$ を満たせば、$\inf_{n\geq 1} f_n$, $\sup_{n\geq 1} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ は全て可積分で、

$$I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n) \leq \limsup I(f_n) \leq I(\limsup f_n)$$

が成り立つ。とくに、極限関数 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ が存在するならば、$f \in L^1$ であり、次が成り立つ。

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

Proof. 自然数 m に対して、

$$-g \leq \inf_{n\geq m} f_n \leq f_m \wedge \cdots \wedge f_n \leq f_m \vee \cdots \vee f_n \leq \sup_{n\geq m} f_n \leq g$$

および

$$f_m \wedge \cdots \wedge f_n \downarrow \inf_{n\geq m} f_n, \quad f_m \vee \cdots \vee f_n \uparrow \sup_{n\geq m} f_n$$

であるから、単調収束定理と I の正値性により、$\inf_{n\geq m} f_n, \sup_{n\geq m} f_n \in L^1$ であり

$$I(\inf_{n\geq m} f_n) = \lim_n I(f_m \wedge \cdots \wedge f_n) \leq \lim_n I(f_m) \wedge \cdots \wedge I(f_n) = \inf_{n\geq m} I(f_n)$$
$$I(\sup_{n\geq m} f_n) = \lim_n I(f_m \vee \cdots \vee f_n) \geq \lim_n I(f_m) \vee \cdots \vee I(f_n) = \sup_{n\geq m} I(f_n).$$

すなわち、

$$-I(g) \le I(\inf_{n\ge m} f_n) \le \inf_{n\ge m} I(f_n) \le \sup_{n\ge m} I(f_n) \le I(\sup_{n\ge m} f_n) \le I(g)$$

となるので、再び単調収束定理により、$\liminf_n f_n, \limsup_n f_n \in L^1$ かつ

$$-I(g) \le I(\liminf_n f_n) \le \liminf_n I(f_n) \le \limsup_n I(f_n) \le I(\limsup_n f_n) \le I(g)$$

である。 □

注意．「dominated convergence theorem」の日本語訳としては、優収束定理が多く使われているようであるが、これだと（優れものであることは正しいにしても）「優れた収束定理」という誤解を与えかねないので、以下では、定理の内容を汲み取って**押え込み収束定理**と呼ぶことにする。

系 5.5. 閉帯領域 $\mathbb{R}^n \times [a,b]$ の上で定義された実数値関数 $f(x,t)$ が (i) 各 $t \in [a,b]$ に対して、$f(x,t)$ が $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として可積分、(ii) 各 x に対して、$f(x,t)$ が t の関数として連続で、(iii) ある可積分関数 $g(x)$ によって $|f(x,t)| \le g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$) と評価されるならば、

$$\lim_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t_0)\,dx.$$

系 5.6. 開帯領域 $\mathbb{R} \times (a,b)$ の上で定義された実数値関数 $f(x,t)$ が、(i) 各 $t \in (a,b)$ に対して、$f(x,t)$ が $x \in \mathbb{R}$ の関数として可積分、(ii) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して、$f(x,t)$ は t の関数として微分可能（すなわち、t 変数に関して偏微分可能）、(iii) 可積分関数 $g(x)$ で、$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ ($x \in \mathbb{R}, a < t < b$) となるものが存在する、と仮定する。このとき、$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ は、x の関数として可積分であり、

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

が成り立つ。

Proof. 有限増分の不等式

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right| \le g(x)$$

を使って押え込み収束定理に持ち込む。 □

例 5.7. (i) 実数 t に対して

$$\int_0^\infty e^{-x^2+tx}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx.$$

(ii) 正数 $t > 0$ に対して、

$$\frac{d^n}{dt^n}\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = (-1)^n \int_0^\infty x^{2n} e^{-tx^2}\,dx.$$

問 26. 正数 $t > 0$ に対して、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^t} = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\,dx$$

を示せ。

問 27. 連続関数 $f(x)$ $(0 \le x \le 1)$ に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\, dx$$

を求めよ。

問 28. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\int |f(x+y) - f(x)|\, dx$ は $y \in \mathbb{R}^n$ の連続関数であることを示せ。

問 29. 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数 g に対して、fg は可積分関数であることを確認。

問 30. 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ と正数 $a > 0$ に対して、

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-a(t-x)^2}\, dt$$

とおくと、f_a は可積分な連続関数で、

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

を満たすことを示せ。

6 測度と積分

積分系 (L, I) から出発して、その拡張版である積分系 (L^1, I^1) を構成した。当然の疑問として、(L, I) の代わりに (L^1, I^1) から出発した場合の拡張 $((L^1)^1, (I^1)^1)$ がどうなっているかが気になるところではある。結論からいうと、$(L^1)^1 = L^1$, $(I^1)^1 = I^1$ となって、これ以上の拡張はなされないことが後ほど示される。一方、$(L^1)^1$ の一つ前の段階である $L^1_\uparrow$ については、新たな利用法が可能である。これを測度の概念と結びつけて解説しよう。

定義 6.1. 集合 X 上の積分系 (L, I) を考える。部分集合 $A \subset X$ が、**I-可測** (I-measurable) であるとは、$1_A \in L^1_\uparrow$ であること。I-可測集合全体を $\mathcal{L}(I)$ あるいは略して $\mathcal{L}$ で表わす。すなわち、

$$\mathcal{L}(I) = \{A \subset X; 1_A \in L^1_\uparrow\}.$$

注意．正確には I-ルベーグ可測とでも称すべきものである。

命題 6.2.

(i) $\emptyset \in \mathcal{L}$.

(ii) 可測集合の列 $\{A_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{L}$ に対して、$\bigcup_{n\ge1} A_n$ および $\bigcap_{n\ge1} A_n$ は可測集合である。

(iii) 可測集合 A, $B \in \mathcal{L}$ に対して、差集合 $B \setminus A$ も可測。

Proof. まず、$L^1_\uparrow$ は束演算で閉じていることから $\mathcal{L}$ は有限個の合併・共通部分について閉じていることに注意する。そこで、(iii) を示すためには、$A \subset B$ と仮定して十分である。

$$L^1_+ \ni \varphi_n \uparrow 1_A, \qquad L^1_+ \ni \psi_n \uparrow 1_B$$

とする。明らかな評価式

$$0 \leq \psi_n - \psi_n \wedge \varphi_m \leq \psi_n$$

で $m \to \infty$ とすると、単調収束定理により $\psi_n - \psi_n \wedge 1_A$ がわかる。さらに、$0 \leq \psi_n \leq 1$ から従う等式 $\psi_n - \psi_n \wedge 1_A = \psi_n \wedge (1 - 1_A)$ に注意すれば、

$$\psi_n \wedge (1 - 1_A) \uparrow 1_B \wedge (1 - 1_A) = 1_{B \setminus A}$$

は $L^1_\uparrow$ に属することがわかる。

最後に (ii) であるが、合併の方は、補題 3.11（単調連続性）からわかる。共通部分の方は、この合併の操作と (iii) を組み合わせて

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n \geq 1} (A_1 \setminus A_n) \right)$$

と書き直せばこれもわかる。 □

定義 6.3. 積分系 (L, I) が σ**-有限** (σ-finite) であるとは、$1_X \in L^1_\uparrow$ となること。

系 6.4. 積分系 (L, I) が σ-有限であるとき、$\mathcal{L}$ は σ**-ブール代数** (σ-Boolean algebra) を成す。すなわち、次が成り立つ。

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$.
(ii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L} \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n, \ \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}$.
(iii) $A \in \mathcal{L} \implies X \setminus A \in \mathcal{L}$.

例 6.5. リーマン積分系の場合、すべての開集合および閉集合は可測集合である。とくに σ-有限である。

可測集合 A に対して、その I-測度を $|A|_I = I^1_\uparrow(1_A)$ で定める。

命題 6.6.

(i) $|A|_I \in [0, +\infty]$.
(ii) $|\emptyset|_I = 0$.
(iii) 可測集合の可算分割和 $\bigsqcup_{n \geq 1} A_n$ に対して、$\left| \bigsqcup_{n \geq 1} A_n \right|_I = \sum_{n \geq 1} |A_n|_I$.

Proof. (i) と (ii) は明らか。(iii) は $I^1_\uparrow$ の σ-加法性（系 3.12）から従う。 □

例 6.7. リーマン積分から作られた I-測度はルベーグ測度と呼ばれ、可測集合の n-次元体積を与えるものと解釈される。

定義 6.8. 一般に、σ-ブール代数 $\mathcal{B} \subset 2^X$ の上で定義され、$[0, +\infty]$ に値をとる関数 μ が**測度** (measure) であるとは、(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ かつ $A_m \cap A_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

（これを σ-加法性という）が成り立つこと。

測度 μ は、$X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ $(\mu(X_n) < +\infty)$ であるとき、**σ-有限**であるという。（積分系に対する条件との関係については後ほど。）また $\mu(X) < +\infty$ である場合に**有限測度** (finite measure)、$\mu(X) = 1$ となるものを**確率測度** (probability measure) という。集合 X、σ-ブール代数 $\mathcal{B} \subset 2^X$ および $\mathcal{B}$ 上の測度 μ の組 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を**測度空間** (measure space) と称する。

注意．2^X は X の冪集合 (power set)、すなわち X の部分集合全体の集合（何という表現であろうか）を表わす。

例 6.9. 与えられた連続関数 $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ によって重みを付けたリーマン積分から得られる測度を考えると

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx$$

の値が有限の場合が有限測度、値が 1 である場合が確率測度となる。

問 31. 可測集合列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ に対して、$\left|\bigcup_{n\geq 1} A_n\right|_I \leq \sum_{n\geq 1} |A_n|_I$ である。

$\boxed{\text{以下では、とくに断らない限り } \sigma\text{-有限な積分系だけを扱う。}}$

つぎは、可測集合が積分を復元するに足るだけ沢山あることを保証する。

命題 6.10. 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して、次は同値。

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, f \vee a \in L^1_\uparrow, f \wedge a \in L^1_\downarrow$.
(ii) $\exists a \in \mathbb{R}, f \vee a \in L^1_\uparrow, f \wedge a \in L^1_\downarrow$.
(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, [f > a] \in \mathcal{L}(I)$.

この同値な条件を満たす関数は、**可測**であるという。

Proof. $f \geq 0$ であるときに、$f \in L^1_\uparrow$ であることの必要十分条件が $\forall a >, [f > a] \in \mathcal{L}$ であることを示せば、他は容易にわかる。[必要性] $f \in L^1$ としてよい。というのも、$f_n \uparrow f$ $(f_n \in L^1)$ のとき、$[f > a] = \bigcup_{n\geq 1} [f_n > a]$ だから。さて、$\varphi_n \uparrow 1_X$ $(\varphi \in L^1_+)$ を用意する。評価式

$$0 \leq \varphi_l \wedge (n(f \vee a\varphi_m - a\varphi_m)) \leq \varphi_l$$

で $m \to \infty$ とすると、押え込み収束定理により $\varphi_l \wedge (n(f \vee a - a)) \in L^1_+$ を得るので、さらに $l \to \infty$ とすると、$1 \wedge (n(f \vee a - a)) \in L^1_\uparrow$ となる。最後に、

$$1 \wedge (n(f \vee a - a)) \uparrow 1_{[f>a]} \quad (n \to \infty)$$

で補題 3.11（単調連続性）を適用すれば $[f > a] \in \mathcal{L}$ がわかる。

[十分性] 自然数 n に対して、

$$f_n = \sum_{1 \leq k < n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{[k2^{-n} < f \leq (k+1)2^{-n}]} + n1_{[f>n]}$$

とおくと、仮定から $[a < f \leq b] = [f > a] \setminus [f > b] \in \mathcal{L}$ であり、従って $f_n \in L^1_\uparrow$ となる。その結果、$f_n \uparrow f$ も $L^1_\uparrow$ に属する。 $\square$

系 6.11. (i) 積分系 (L,I) が σ-有限であるとき、それに付随した測度 $|\cdot|_I$ は σ-有限である。

(ii) $(L^1)^+_\uparrow$ は、積と冪乗について閉じている。ただし、積の値については $\infty\times 0=0$ と約束する。

Proof. (i) $X_{n,m}=[\varphi_n>1/m]$ とおくと、$\frac{1}{m}1_{X_{n,m}}\leq\varphi_n$ より $|X_{n,m}|_I\leq mI(\varphi_n)<+\infty$ である。あとは、$X=\bigcup_{m,n\geq 1}X_{n,m}$ に注意すればよい。

(ii) 冪乗については、$a>0$ に対して、$[f^\alpha>a]=[f>a^{1/\alpha}]$ に注意すればよい。積については、$f_ng_n\uparrow fg$ であるが、$1_A1_B=1_{A\cap B}$ から従う $f_ng_n\in L^1_\uparrow$ に注意すればよい。 □

可測集合 A と可積分関数 f に対して、その積 1_Af は可積分である。そこで、f の A の上での積分を

$$I(1_Af)=\int_A f(x)\,\mu(dx)$$

によって与える。

問 32. $\mathcal{L}(I)\ni A\mapsto\int_A f(x)\,\mu(dx)\in\mathbb{R}$ は「符号付測度」を定める。

積分が測度によって復元されることを見よう。$f\in L^1_+$ とする。上の命題の証明の中で使用した関数 f_n は、この場合、L^1 に属するので、単調収束定理により

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\leq k<n2^n}\frac{k}{2^n}|[k2^{-n}<f\leq(k+1)2^{-n}]|_I+n|[f>n]|_I\right)$$

を得る。結論として、積分 I は、測度 $\mu(\cdot)=|\cdot|_I$ によって決まるため、積分系をベクトル束と測度の組 (L,μ) によって指定することができる。(当然のことながら、μ は L と独立には選べないが。)

ここまでは実数値関数を専ら扱ってきたが、積分の実際の応用では、複素数値関数にまで広げておくのがよい。

定義 6.12. 複素数値関数 $f:X\to\mathbb{C}$ が可測(可積分)であるとは、その実部 $\Re f$ および虚部 $\Im f$ がともに可測(可積分)であることと定義する。可積分な複素数値関数 f に対してその積分を $I(f)=I(\Re f)+iI(\Im f)$ で定める。可積分な複素数値関数全体を $L^1_\mathbb{C}$ で表わす。

問 33. 可積分な複素数値関数全体は複素ベクトル空間をなし、積分はその上の複素線型汎関数を与える。

命題 6.13. 可測関数 $f:X\to\mathbb{C}$ に対し、$|f|$ も可測であり、f が可積分であるための必要十分条件は、$|f|$ が可積分であること。このとき不等式 $|I(f)|\leq I(|f|)$ が成り立つ。

Proof. 不等式の証明は、例えば、極表示 $I(f)=|I(f)|e^{i\theta}$ を使って

$$|I(f)|=I(\Re f)\cos\theta+I(\Im f)\sin\theta=I\big((\Re f)\cos\theta+(\Im f)\sin\theta\big)\leq I(|f|)$$

と計算する。 □

定理 6.14 (押え込み収束定理). 各点収束する可積分な複素数値関数列 $\{f_n\}$ と関数 $g\in L^1$ が $|f_n|\leq g$ $(n\geq 1)$ を満たせば、極限関数 $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ は可積分であり、$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)$ が成り立つ。

例 6.15. ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+itx}\,dx=\sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$$

の実解析学的計算。

問 34. 可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と正数 $a > 0$ に対して、$x \in \mathbb{R}$ の関数

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2}\, dt$$

は、複素平面 $\mathbb{C}$ 全体に延長できる解析関数である。

非可測集合は、選択公理を使ってその存在を示すことができる。アイデアの本質が見えるように、円周上の積分を考える。円周は、絶対値 1 の複素数全体 $\mathbb{T}$ と同一視て、群の構造を入れておく。複素数の極表示により $\mathbb{T}$ の点を角変数 θ で表わせば $\mathbb{T}$ 上の連続関数は、角変数 θ の連続関数で周期 2π で周期的なものとを同一視することことができる。そのような関数全体を L とし、L 上の積分を連続関数に対するリーマン積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

によって定める。こうして得られる積分系に付随する測度 μ は確率測度となる。回転に関する積分の不変性から、μ も回転に関して不変となる。無理数 t (例えば、$\sqrt{2}$) を一つ取ってきて $\mathbb{T}$ の部分群 $H = \{e^{2\pi i t n}; n \in \mathbb{Z}\}$ を考える。t が無理数であることから $\mathbb{Z} \ni n \mapsto e^{2\pi i t n}$ は、$\mathbb{Z}$ と H の間の同型を与えることに注意。剰余類群 $\mathbb{T}/H$ を考え、その代表系 R をひとつ選ぶ（ここで選択公理を使う)。そうすると R は、非可測集合である。というのは、分割和

$$\mathbb{T} = \sqcup_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i t n} R$$

が成り立つので、もし R が可測集合であれば、μ の回転不変性により

$$1 = \mu(\mathbb{T}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(e^{2\pi i t n} R) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(R)$$

となるべきであるが、これは $\mu(R) = 0$ としても $\mu(R) > 0$ としても矛盾に至る。

7 零関数と零集合

積分系 (L, I) における可積分関数 f の特徴づけを思い起こそう。

$$\forall \epsilon > 0, \exists f_\downarrow \in L_\downarrow, f_\uparrow \in L_\uparrow, f_\downarrow \leq f \leq f_\uparrow, I_\uparrow(f_\uparrow - f_\downarrow) \leq \epsilon.$$

これから、$\epsilon = 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ に対して、増加列 $f_n^\downarrow \in L_\downarrow$ および減少列 $f_n^\uparrow \in L_\uparrow$ を $f_n^\downarrow \leq f \leq f_n^\uparrow$, $I_\uparrow(f_n^\uparrow - f_n^\downarrow) \to 0$ となるように選んでおけば、極限関数 $\overline{f} = \lim_n f_n^\uparrow$ および $\underline{f} = \lim_n f_n^\downarrow$ は、何らかの形で f に近いのではないかと期待される。

結論を述べると、$\overline{f} \in L_\uparrow^1$, $\underline{f} \in L_\downarrow^1$ であり $I_\uparrow^1(\overline{f} - \underline{f}) = 0$ となることが示される。こういった状況を利用しやすい形で直感ともうまく合致させた概念に零集合および関数の事実上の同一視がある。

定義 7.1. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f \in L^1$ かつ $I(|f|) = 0$ となるものを**零関数** (null function) と呼ぶ。部分集合 $A \subset X$ が**零集合** (null set) であるとは、その表示関数 1_A が零関数であること。別の言い方をすると、A は可測集合でその測度が $|A|_I = 0$ となること。零集合全体を $\mathcal{N}(I)$ あるいは略して $\mathcal{N}$ という記号で表わす。

命題 7.2. 零集合の性質。

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}(I)$.

(ii) 零集合 $N \in \mathcal{N}(I)$ に対して、その部分集合は零集合。
(iii) 零集合の可算列 $\{N_n\}_{n\geq 1}$ に対して、$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ も零集合。

問 35. 上の性質を確かめよ。

例 7.3.

(i) Dirichlet 関数は零関数。
(ii) $\mathbb{R}$ の可算部分集合。
(iii) Cantor 集合。
(iv) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の超曲面。

問 36. $\mathbb{R}^n$ の超曲面が零集合であることを確かめよ。ヒント：陰関数定理。

補題 7.4. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について、次の条件は同値である。

(i) f は零関数である。
(ii) $[f \neq 0]$ は零集合である。

Proof. 次の関係に注意する。

$$1_{[f\neq 0]} = \lim_{n\to\infty} 1 \wedge (n|f|), \qquad |f| = \lim_{n\to\infty} |f| \wedge (n1_{[f\neq 0]}).$$

それぞれにおいて、

$$I(1 \wedge n|f|) \leq I(n|f|) = nI(|f|), \qquad I(|f| \wedge n1_{[f\neq 0]}) \leq I(n1_{[f\neq 0]}) = nI(1_{[f\neq 0]})$$

と評価して単調収束定理を使えばよい。 □

上の補題からわかることは、零関数の違いは積分の値に一切効いてこないということである。これは、実際、積分についての感覚とも合致している。誰も

$$\int_{(0,1)} f(x)\, dx, \quad \int_{[0,1]} f(x)\, dx$$

の２つの積分の違いを問題にしたいとは思わないであろう。

定義 7.5. 関数 $f' : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ $(X' \subset X)$ に対して、$f \in L^1$ と零集合 $N \supset X \setminus X'$ が存在し、$f'(x) = f(x)$ $(\forall x \in X \setminus N)$ であるとき、f' は**ほとんど至るところ** (almost everywhere) L^1 に属するといい、$f' \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ と書く。このとき、$I(f')$ の値を $I(f)$ により定める。

２つの関数 $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が**ほとんど至るところ等しい**とは、集合 $[f \neq g]$ が零集合に含まれること。これを $f \overset{\text{a.e.}}{=} g$ と書く表わす。

これは同値関係である。この同値類を事実上の関数とみなす。関数の和、積、スカラー倍、束演算は事実上の関数に対する演算として定義がうまくいくことが容易に確かめられる。

例えば、零集合 N_1, N_2 以外で定義された関数 $f_j : X \setminus N_j \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$ に対して、その和 $f_1 + f_2$ を $X \setminus (N_1 \cup N_2)$ 上で、$f_1(x) + f_2(x)$ と定義すれば、除外集合の取り方によらずに定まる。

注意．このさりげなくかつ強力な表現は Lebesgue による。「almost everywhere (a.e.)」とは仏語の「presque partout (p.p.)」の直訳英語である。原語の頭韻（？）を意識して、「almost all (a.a.)」という言い方をする場合もある。他に「almost surely (a.s.)」というのもあるが、こちらも韻にはなっていない。

問 37. スカラー倍、束演算についても確かめよ。

問 38. $f \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ ならば、$|f| \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ であり、不等式 $|I(f)| \leq I(|f|)$ が成り立つ。

これ以外にも、ほとんど至るところの収束、ほとんど至るところ定義された可測関数、ほとんど至るところの増加列といった言い方が可能で、各種収束定理の「ほとんど至るところ」版などが成り立つ。

問 39. 単調収束定理、押え込み収束定理の「ほとんど至るところ版」を確かめよ。

補題 7.6. 関数 $f \in L^1_\uparrow$ が、$I^1_\uparrow(f) < +\infty$ を満たせば、$f \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ である。

Proof. $f_n \uparrow f$ $(f_n \in L^1)$ とせよ。f の代わりに $f - f_1$ を考えることで、$f \geq 0$ と仮定してよい。$N = [f = +\infty]$ とおく。正数 a に対して、$a1_N \leq f$ から従う $a\overline{I}(1_N) \leq \overline{I}(f) = I_\uparrow(f) < +\infty$ より $\overline{I}(1_N) = 0$ となり $N \in \mathcal{N}(I)$ がわかる。

そうすると、上の補題により、$f_n 1_N \in L^1$ となり、$f_n 1_{X\setminus N} \uparrow f 1_{X\setminus N}$ は、$f_n - f_n 1_N \in L^1$ の増加列極限として、単調収束定理が適用でき、$f 1_{X\setminus N} \in L^1$ がわかる。明らかに $f \overset{\text{a.e.}}{=} f 1_{X\setminus N}$ である。 □

定理 7.7. ほとんど至るところ定義された可積分関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が、

$$\sum_{n\geq 1} I(|f_n|) < +\infty$$

を満たすならば、零集合 N が存在して、(i) すべての n について、$X \setminus N$ は f_n の定義域に含まれる、(ii) $x \in X \setminus N$ ならば $\sum_n |f(x)| < +\infty$.

したがって、$f(x) = \sum_n f_n(x)$ $(x \notin N)$ とおくと、f はほとんど至るところ定義された可積分関数であり、

$$I(f) = \sum_n I(f_n)$$

が成り立つ。

Proof. 各 f_j は、零集合 N_j 以外で定義されているとする。このとき、$\widetilde{f}_j(x) = f_j(x)$ $(x \notin \cup_j N_j)$ かつそれ以外では 0 と定めると $\widetilde{f}_j \in L^1$ であり（上の補題参照)、

$$\sum_{n\geq 1} |\widetilde{f}_n| \in L^1_\uparrow$$

となる。さらに

$$I_\uparrow\left(\sum_{n\geq 1} |\widetilde{f}_n|\right) = \sum_{n\geq 1} I(|\widetilde{f}_n|) = \sum_{n\geq 1} I(|f_n|) < +\infty$$

であるから、

$$\sum_{n\geq 1} |\widetilde{f}_n(x)| = +\infty$$

となる x 全体 N_0 は零集合である。そこで、$N = \cup_{n\geq 0} N_j$ とおくと、$x \notin N$ に対して

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \widetilde{f}_n(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$$

は絶対収束し、ほとんどいたるところ定義された可積分関数を定め、求める収束定理がわかる。 □

例 7.8. 有理数全体を $\{q_n; n \geq 1\}$ と一列に並べると、可測関数

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^3(x-q_n)^2}$$

は、ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して有限値を取り

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{\pi}{n^3}} < +\infty.$$

上掲収束定理の理論的な応用として、次を挙げておこう。

命題 7.9. (i) ベクトル空間 L^1 は、L のノルム $\|f\|_1 = I(|f|)$ に関する完備化に一致する。

(ii) 零関数の違いを除いて、$L^1 = L^1 \cap L_\uparrow - L^1 \cap L_\uparrow$ が成り立つ。すなわち、可積分関数 $f \in L^1$ に対して、関数 $f_\pm \in L^1 \cap L_\uparrow$ および零集合 N が存在して、$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ $(x \notin N)$ となる。

Proof. 証明は書くと長くなるが、その方針さえ定まれば単純なものである。

まず (ii) を示そう。$L_\uparrow$ の減少関数列 $f_n \geq f$ を $I(f_n - f) \leq 1/2^n$ であるように取り、次に $f_{n,m} \in L$ を

$$f_{n,m} \uparrow f_n \ (m \to \infty), \quad I(f_n - f_{n,m}) \leq \frac{1}{2^{m+n}}$$

であるように選ぶ。このとき、

$$0 \leq I(f_{n,m} - f_{n,m-1}) = I(f_n - f_{n,m-1}) - I(f_n - f_{n,m}) \leq \frac{1}{2^{m+n-1}} + 0 = \frac{2}{2^{m+n}}$$

であるから、$\sum_{m,n\geq 1}(f_{n-1,m} - f_{n-1,m-1})$ は、ほとんど至るところ絶対収束する。さて、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n &= f_0 + \sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1}) \\
&= f_{0,0} + \sum_{m\geq 1}(f_{0,m} - f_{0,m-1}) + \sum_{n\geq 1}(f_{n,0} - f_{n-1,0}) \\
&\quad + \sum_{m,n\geq 1}(f_{n,m} - f_{n,m-1}) - \sum_{m,n\geq 1}(f_{n-1,m} - f_{n-1,m-1})
\end{aligned}$$

で、絶対収束性が未確認の部分は、

$$I(|f_{n,0} - f_{n-1,0}|) \leq I(|f_{n,0} - f_n|) + I(|f_n - f_{n-1}|) + I(|f_{n-1} - f_{n-1,0}|) \leq \frac{6}{2^n}$$

に注意すれば、やはり、ほとんどいたるところ絶対収束することがわかる。さらに、

$$f_{0,0} = 0 \vee f_{0,0} - 0 \vee (-f_{0,0}),$$
$$f_{n,0} - f_{n-1,0} = 0 \vee (f_{n,0} - f_{n-1,0}) - 0 \vee (f_{n-1,0} - f_{n,0})$$

と分解し、$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (a.e. $x \in X$) に注意すれば、(ii) をみたす $f_\pm \in L^1 \cap L_\uparrow$ として、

$$f_+ = 0 \vee f_{0,0} + \sum_{m\geq 1}(f_{0,m} - f_{0,m-1}) + \sum_{n\geq 1} 0 \vee (f_{n,0} - f_{n-1,0}) + \sum_{m,n\geq 1}(f_{n,m} - f_{n,m-1})$$
$$f_- = 0 \vee (-f_{0,0}) + \sum_{n\geq 1} 0 \vee (f_{n-1,0} - f_{n,0}) + \sum_{m,n\geq 1}(f_{n-1,m} - f_{n-1,m-1})$$

が取れる。

(i) 改めてコーシー列 $f_n \in L^1$ をとる。すなわち、

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} I(|f_m - f_n|) = 0.$$

このとき、部分列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ を $I(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|) \leq 1/2^k$ となるように取ることができるので、極限関数

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f_{n_0} - \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$$

がほとんどいたるところ収束する形で定義できる。さらに、

$$|f_n - f_{n_k}| \leq |f_n - f_{n_0}| + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \in L^1$$

であるから、押え込み収束定理とコーシー列の性質から

$$0 = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} I(|f_n - f_{n_k}|) = \lim_{n\to\infty} I(|f_n - f|)$$

となって、めでたい。 □

注意． 上の命題を逆手に取れば、Riesz 方式のルベーグ積分の定義に到達する。すぐわかるように、

$$L^1 \cap L_\uparrow = \{f; f_n \in L, f_n \uparrow f, \sup_{n\geq 1} I(f_n) < +\infty\}, \quad I(f_n) \uparrow I(f)$$

であるから、上の命題 (ii) を L^1 の定義と思えば、$f = f_+ - f_-$ の積分を、$I(f) = I(f_+) - I(f_-)$ によって定義できる。ほとんど至る所の同一視を早い段階から取り込むことで、関数列の極限操作を 1 回で済ませられる利点がある。詳しくは、[Riesz-Nagy]、[溝畑]、[洲之内] を見よ。

最後に、前節冒頭で紹介した事実を確かめておこう。

命題 7.10. $(L^1)^1 = L^1$

Proof. $f \in (L^1)^1$ とせよ。$f_n \downarrow f$ $(f_n \in L^1_\uparrow)$ であるが、$\lim I_\uparrow(f_n) < +\infty$ より、$f_n \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ となる。そこで、単調収束定理（ほとんど至るところ版）より、$f \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ となる。f は有限値関数であるから、$f \in L^1$ であるとわかる。 □

8 繰り返し積分の公式

この節でも引き続き、積分系は σ-有限であるものとする。

全射 $\pi : \Omega \to X$ を考える。Ω 上の σ-有限なベクトル束 F および X 上の積分系 (L, μ) が与えられ、さらに各 $x \in X$ ごとに、$\pi^{-1}(x)$ 上の積分系 (L_x, μ_x) が定められ、以下の性質を満たすとする。関数 $f \in F$ に対して、

(i) $\forall x \in X,\ f|_{\pi^{-1}(x)} \in L_x$ であり、
(ii) 積分 $\displaystyle\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega)$ が x の関数として L に属す。

このとき、$(F, (L,\mu), \{(L_x, \mu_x)\})$ を**ファイバー積分系**(fibered integration system) と呼ぶ。ファイバー積分系において、

$$I(f) = \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)\, f(\omega)$$

は F 上の積分を定めることがわかる。

例 8.1. 自然な射影 $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ に基づいたファイバー積分系をリーマン積分により定めることができる。これを**繰り返し積分系** (repeated integration system) と呼ぶ。

定理 8.2. ファイバー積分系 $(\pi : \Omega \to X, F, (L,\mu), \{(L_x, \mu_x)\})$ を考える。

(i) $f \in F_\uparrow$ とすると、すべての $x \in X$ について $f|_{\pi^{-1}(x)} \in (L_x)_\uparrow$ であり、さらにファイバー積分

$$\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega)$$

は x の関数として $L_\uparrow$ に属し、次が成り立つ。

$$I_\uparrow(f) = \int_X \left(\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega) \right) \mu(dx).$$

(ii) 可積分関数 $f \in F^1$ に対して、零集合 $N \subset X$ が存在し、$x \in X \setminus N$ ならば $f|_{\pi^{-1}(x)} \in L_x^1$ であり、さらに関数

$$X \setminus N \ni x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega)$$

は L^1 に属し、次が成り立つ。

$$I(f) = \int_X \left(\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega) \right) \mu(dx).$$

Proof. (i) $f \in F_\uparrow$ を $f_n \uparrow f$ $(f_n \in F)$ と表わしておく。このとき、$\forall x \in X,\ f_n|_{\pi^{-1}(x)} \uparrow f|_{\pi^{-1}(x)}$ であるので、定義の一部である $f_n|_{\pi^{-1}(x)} \in L_x$ に注意すれば、$f|_{\pi^{-1}(x)} \in (L_x)_\uparrow$ がわかる。さらに次が成り立つ。

$$\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} f_n(\omega)\, \mu_x(d\omega).$$

一方、$\forall n \geq 1$, 関数

$$x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} f_n(\omega)\, \mu_x(d\omega)$$

は、仮定から L に属すので、その増加極限関数として

$$x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\, \mu_x(d\omega)$$

は、$L_\uparrow$ に属す。また、

$$\begin{aligned} I_\uparrow(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega) f_n(\omega) = \int_X \mu(dx) \lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega) f_n(\omega) \\ &= \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega) \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)\, f(\omega) \end{aligned}$$

である。

(ii) $f \in F^1$ に対して、増加列 $\{f_n^\downarrow\} \subset F_\downarrow$ と減少列 $\{f_n^\downarrow\} \subset F_\downarrow$ を

$$f_n^\downarrow \leq f \leq f_n^\uparrow, \qquad I_\uparrow(f_n^\uparrow - f_n^\downarrow) \leq \frac{1}{n}$$

であるように取る。このとき、(i) より、関数

$$h_n(x) = \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)(f_n^\uparrow(\omega) - f_n^\downarrow(\omega))$$

は、$L_\uparrow^+$ に属し $I_\uparrow(f_n^\uparrow - f_n^\downarrow) = \int_X \mu(dx) h_n(x) \downarrow 0$ である。補題 7.6 により $h_n \overset{\text{a.e.}}{\in} L^1$ がわかるので、単調収束定理（ほとんど至るところ版）により、零集合 $N \subset X$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)(f_n^\uparrow(\omega) - f_n^\downarrow(\omega)) = 0 \quad \text{for } x \notin N.$$

これは、$x \notin N$ のとき、 $f|_{\pi^{-1}(x)} \in (L_x)^1$ を意味し、

$$\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\,\mu_x(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} f_n^\uparrow(\omega)\,\mu_x(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} f_n^\downarrow(\omega)\,\mu_x(d\omega)$$

が成り立つ。

一方、$I_\uparrow(f_n^\uparrow) \downarrow I(f)$ であることから、再び補題 7.6 により、$x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} f_n^\downarrow(\omega)\,\mu_x(d\omega)$ はほとんど至るところ L^1 に属し、これに単調収束定理（ほとんど至るところ版）を適用することで、$\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega)\,\mu_x(d\omega)$ が x の関数としてほとんど至るところ $L^1(X, \mu)$ に属し、

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim_{n\to\infty} I_\uparrow(f_n^\uparrow) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)\, f_n^\downarrow(\omega) \\ &= \int_X \mu(dx) \lim_{n\to\infty} \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)\, f_n^\downarrow(\omega) = \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega)\, f(\omega). \end{aligned}$$

□

例 8.3. $\Omega = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$, $\pi : \Omega \ni (t, x) \mapsto t \in\to X$, $F = C_c(\Omega)$, $L = C_c(X)$, $\pi^{-1}(t) = \{t\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ 上の積分系 $L_t = C_c(\{t\} \times \mathbb{R}) \cong C_c(\mathbb{R})$,

$$\mu_t(dx) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} dx & \text{if } t > 0, \\ \delta(x) & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}} f(t, x)\,\mu_t(dx).$$

系 8.4 (ルベーグ測度の再生性). 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ に対して、零集合 $N \subset \mathbb{R}^m$ が存在し、$x \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ならば、零関数の違いを除いて $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり、関数

$$\mathbb{R}^m \setminus N \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,dy$$

は零関数の違いを除いて $L^1(\mathbb{R}^m)$ に属し、次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

同様のことが x と y の順序を入れ替えて成り立つ。とくに

$$\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right)\,dx. = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

である。

例 8.5.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}e^{-tx^2}\,dtdx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}e^{-tx^2}\,dxdt = C\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2C^2.$$

ここで、

$$C = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt.$$

問 40. 正数 $t > 0$ を経数とする二重積分

$$\int_t^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dxdy$$

に繰り返し積分の公式が適用できることを確かめて、

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

を導け。

問 41. * $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ とするとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-|x|^\beta}}{|x|^\alpha}\,dx = \begin{cases}\frac{2\pi^{n/2}}{\beta\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) & \text{if } \alpha < n,\\ +\infty & \text{if } \alpha \geq n.\end{cases}$$

問 42.

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{|x-y|^\alpha}\,dxdy < +\infty$$

であるような実数 α の範囲を求めよ。

問 43. 可積分関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ と正数 $a > 0$ に対して、

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-t)e^{-at^2}\,dt$$

は、可積分な解析関数で $\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = 0$ であることを既に確かめた。ここでは、次を示せ。

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-\infty}^\infty |f(x) - f_a(x)|\,dx = 0.$$