A Primer to Functional Analysis

Yamagami Shigeru

平成 14 年 6 月 19 日

始りの前に

以下は、２０００年４月から２００１年１月にかけて茨城大学理学部で行われた４年生用の講義「関数解析学 Ｉ、ＩＩ」の記録である。

通常、この手の授業では、一般論に終始し、実際の運用方法に関してまでは手がまわらないのが通例で、このノートもご多分にもれず、「本当に役に立つ」ところまでは行っていない。

これは、一つには、どの方面への応用を考えるにしてもそれ相当の準備が必要になるためで、時間的な制約を考慮に入れるとやむをえないことではあるが、単なる「頭の訓練」では虚しいので、とくに前半では微積分と線型代数の「復習」に利するように心がけた。

後半は、ヒルベルト空間上の線型作用素について、その基礎的な事項からはじめて有界エルミート作用素のスペクトル分解までを目標とした。ルベーグ積分を使わない方針だったので、スティルチェス積分に関する節をとくに設け、Reed-Simon の教科書に載っている Riesz-Markov-Kakutani の定理の Hahn-Banach による証明を援用することにより、分解定理の証明としては「最短コース」であるように工夫した。

あわせて２５回程度の講義ということもあり、コンパクト作用素の理論にふれることができなかったが、これについては大抵の教科書に（大差のない）説明があるので、ここでは説明を省略する。

全体を通じて、日合・柳および Reed-Simon の教科書をつまみ食いした形にはなったが、論理的整合性は保てたはずである。この２つの本は、本格的な Rudin の教科書とあわせて、より詳しく「関数解析学」を知る上で参考になろう。

復習と見通し

- 実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$。

- 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$。
- 内積

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

- 長さ (ノルム)

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

- ノルムの性質

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \tag{2}$$

$$\|x\| \ge 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0. \tag{3}$$

関数解析学 ＝ 無限次元線型代数学

1　バナッハ空間

閉区間 $I = [a, b]$ に対して、I 上の連続関数全体の集合

$$C[a, b] = C(I, \mathbb{R}) \text{ or } C(I, \mathbb{C})$$

を考えると (C は continuous の頭文字)、これは

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t)$$

により、ベクトル空間である。$C[a, b]$ は無限個の 1 次独立なベクトル $\{t^n; n = 0, 1, \ldots\}$ を含むので無限次元である

問 1. これを確かめよ。

このように無限次元ベクトル空間として、関数の作るベクトル空間が主要な考察の対象になる。関数を点と抽象化することにより全体の見通しを良くするという現代数学 (?) の典型例である。

関数空間 $C[a, b]$ においてもノルムの考察が重要で、

$$\|x\| = \max\{|x(t)|; a \le t \le b\}$$

とおくとこれが実際ノルムの性質をみたす。

問 2. これを確かめよ。

ノルムが指定されたベクトル空間を**ノルム空間**(normed vector space)と呼ぶ。

ノルム空間においては、距離を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で導入できるので、距離空間の構造をも併せ持っている。

問 3. 距離の性質を確かめよ。

この距離を使うことにより、ノルム空間における収束の概念を、

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

により導入する。関数空間 $C[a, b]$ に上で与えたノルムの場合、これは関数列 $\{x_n(t)\}_{n\geq 1}$ が連続関数 $x(t)$ に一様収束することに他ならない。

問 4. 一様収束の概念を復習し、これを確かめよ。

ノルム空間の点列 $\{x_n\}$ がベクトル x に収束するならば、$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\|$ より、

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$$

である。逆にこの性質をもつ点列 (**Cauchy 列**) が常に収束するとき、ノルム空間は**完備** (complete) であるいう。完備なノルム空間は、その研究者に因んで**バナッハ空間**(Banach space) と称される。

次は、実数の完備性の直接の結果である。

例題 1.1. 有限次元ユークリッド空間は、バナッハ空間である。

命題 1.2. ノルム空間 $C[a, b]$ は完備である。

Proof. ノルム空間 $C[a, b]$ の Cauchy 列 $\{x_n\}$ を考える。任意の $t \in [a, b]$ に対して、

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_m(t) - x_n(t)| \leq \lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$$

であるから、実数の完備性により、

$$x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

が存在する。さらに、関数列 $\{x_n\}$ は x に一様収束するので、x は連続関数になり、完備であることがわかる。 $\square$

問 5. 上の証明の細部を埋めよ。

問 6.

$$C_0(a,b) = \{f \in C[a,b]; f(a) = f(b) = 0$$

とおくと、これは $C[a,b]$ の閉部分空間であり、したがってそれ自身 Banach 空間である。

関数空間 $C[a,b]$ がバナッハ空間になるという事実は、ベクトル値関数についても成り立つ：与えられたバナッハ空間 V (特に、有限次元ユークリッド空間）に対して、

$$C(I,V) = \{x : I \to V; x \text{ は連続 }\}$$

とおいて、ノルムを

$$\|x\| = \max\{\|x(t)\|; t \in I\}$$

で定めると、バナッハ空間が得られる。

問 7. これを詳しく調べよ。

2 縮小写像と不動点定理

距離空間 X における閉集合 F。
X が完備ならば、F も完備。
閉球

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X; d(x,y) \leq r\}$$

は、閉集合である。

問 8. これを確かめよ。

完備距離空間 (X,d) を考える。写像 $T : X \to X$ で、

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y), \quad 0 < \alpha < 1$$

となるものを**縮小写像**(contraction) という。

定理 2.1 (不動点定理). 縮小写像 $T : X \to X$ に対して、

$$T(x) = x$$

となる点 $x \in X$（T の**不動点**）が存在し一意的である。

Proof. 任意の $x \in X$ に対して、

$$x_n = T^n(x), \quad n \geq 1$$

とおくと、$\{x_n\}$ は Cauchy 列であり、したがって、

$$y = \lim_{n \to \infty} x_n$$

となる点 y が存在し、このとき、

$$T(y) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = y$$

である。 □

問 9. 証明を詳しく書け。

問 10. 連続微分可能関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ が、$|f'(t)| < 1$ をみたすならば、$f(t) = t$ となる実数 $0 \leq t \leq 1$ が一つだけ存在する。これを示せ。

定理 2.2. 与えられた t_0 とベクトル $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq r, \|x - x_0\| \leq R\}$$

とおく。閉集合 D の上で定義されたベクトル値関数 $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ が条件（***Lipschitz condition***）

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x) \in D, (t, y) \in D$$

をみたすとき、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

の解 $x(t)$ *(*$|t - t_0| < \delta$*)* で $x(t_0) = x_0$ となるものが、存在する。ここで、

$$\delta = \min\{r, R/M, 1/L\}, \quad M = \sup\{\|f(t, x)\|; (t, x) \in D\}$$

である。

Proof. 問題にしている微分方程式（の初期値問題）は、積分方程式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

に書き直すことができる。そこで、写像 $T : x(s) \mapsto \widetilde{x}(t)$ を

$$\widetilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

で定義し、解を T の不動点であると思いたい。そのためには、$\|x(s) - x_0\| \leq R$ でなければならず、さらに、$\widetilde{x}$ も同じ条件を満たすようにしようと思ったら、

$$\|\widetilde{x}(t) - x_0\| \leq M|t - t_0|$$

より、$M|t - t_0| \leq R$ となる範囲すなわち、

$$\delta \leq \min\{r, R/M\}$$

で考えればよい。そこで、$I = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \delta\}$ として、バナッハ空間 $C(I, \mathbb{R}^n)$ の閉球 $\overline{B}(x_0, \delta)$ を完備距離空間 X であると思うと、T は、X から X への写像を定め、さらに Lipschitz 連続性により、

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \sup \| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds\| \\ &\leq \sup L|t - t_0| \|x - y\| \\ &= L\delta \|x - y\| \end{aligned}$$

である。そこで、さらに $L\delta < 1$ であれば、T は縮小写像となり不動点 x をもつ。これすなわち、解に他ならない。そこで、

$$\delta_\epsilon = \min\{r, R/M, (1 - \epsilon)L\}, \quad 0 \leq \epsilon < 1$$

とおくと、$I_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \delta_\epsilon\}$ で積分方程式の解の存在と一意性が成り立ち、I_ϵ, $0 < \epsilon < 1$ を併せることにより、$|t - t_0| < \delta_0$ での解の存在と一意性が得られる。 $\square$

3　多項式近似定理

以下、関数は断らない限り $\mathbb{C}$ に値を取るものとする。

$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; f$ は連続で $\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)| = 0\}$,

$C_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; f$ はある有界区間の外では恒等的に 0 であるような連続関数$\}$

とおく。どちらもベクトル空間であり、$C_c(\mathbb{R})$ は $C_0(\mathbb{R})$ の部分空間になっている。$C_0(\mathbb{R})$ におけるノルムを

$$\|f\| = \max\{|f(t)|; t \in \mathbb{R}\}$$

で定めると、これは Banach 空間である。このことは直接示すこともできるが、例えば、変数変換

$$\Phi(t) = \frac{2t}{1-t^2},\ -1 < t < 1, \quad \Phi(-1) = -\infty, \Phi(1) = +\infty$$

を考えると、これは連続写像 $[-1, 1] \to [-\infty, +\infty]$ になっていて、さらに

$$S : C_0(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f \circ \Phi \in C_0(-1, 1)$$

とおくと、これは線型全単射で、

$$\|S(f)\| = \|f \circ \Phi\| = \|f\|,$$

すなわち、$C_0(\mathbb{R})$ と $C_0(-1, 1)$ はノルムも含めて全く同じ構造をもつ。ノルム空間 $C_0(-1, 1)$ は Banach 空間であったから同じことが $C_0(\mathbb{R})$ についても言える。もっと詳しく述べると、

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{m,n\to\infty} \|S(f_m) - S(f_n)\| = 0$$

であり $\{S(f_n)\}_{n\geq 1}$ は、$C_0(-1, 1)$ の Cauchy 列、したがって完備性により

$$\lim_{n\to\infty} S(f_n) = g \in C_0(-1, 1)$$

となる。S は双射であったから、$S(f) = g$ となる $f \in C_0(\mathbb{R})$ が（一意的に) 存在して、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \|S(f_n) - S(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|S(f_n) - g\| = 0.$$

すなわち、$C_0(\mathbb{R})$ も完備である。

例題 3.1. $C_c(\mathbb{R})$ は $C_0(\mathbb{R})$ で稠密 (dense) である。

実際、連続関数 $0 \leq \theta_n(t) \leq 1$ で、

$$\theta_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq n, \\ 0 & \text{if } |t| \geq n+1 \end{cases}$$

となるものを用意して

$$f_n(t) = \theta_n(t) f(t) \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

である。

有限閉区間 $[a, b]$ で定義された多項式関数全体を $P[a, b]$ で表せば、これは、$C[a, b]$ の部分空間である。ここで問題：連続関数は、有限閉区間の上で多項式（関数）で一様近似できるであろうか。与えられた連続関数 $f(t)$ と有限個の点 $a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ に対して、$P(t_j) = f(t_j)$ となる多項式 $P(t)$ を簡単に作ることができる。有名なところでは、**Lagrange の補間公式** (Lagrange's interpolation formula)

$$f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(t_j)}{g'(t_j)} \frac{g(t)}{(t - t_j)}, \quad g(t) = (t - t_1) \ldots (t - t_n)$$

がある。ということで、任意の連続関数は多項式で一様近似できそうだと思えてくる。しかしながら、事はそれほど単純ではなく、Lagrange の補間多項式については、一般に

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

とはならないことが知られている。

問 11. このことを考えてみよう。失敗のレポートでもよいから、思考の軌跡をまとめてみるべし。

問 12. 無限区間では、即座に反例が作れる。例えば、$f \in C_0(\mathbb{R})$ が恒等的に 0 でなければ、どのような多項式 g に対しても

$$\sup\{|f(t) - g(t)|; t \in \mathbb{R}\} = +\infty$$

である。

実数 s に対して、**移動作用素** (translation operator) $T_s : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ を

$$(T_s f)(t) = f(t-s)$$

で定める。

問 13. 移動作用素 T_s は等距離作用素である：$\|T_s f\| = \|f\|$ が成り立つ。

補題 3.2 (一様連続性). $f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して、

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto T_s f \in C_0(\mathbb{R})$$

は連続、すなわち

$$\lim_{s \to s_0} T_s f = T_{s_0} f \quad in\ C_0(\mathbb{R}).$$

Proof. まず $f \in C_c(\mathbb{R})$ の場合を考える。$f(t) = 0$ for $t \notin [a,b]$ とせよ。すると、$f(t), t \in [a,b]$ の一様連続性により、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(t) - f(t')| \le \epsilon \quad \text{if } |t - t'| \le \delta.$$

とくに、$|s - s_0| \le \delta$ に対して、

$$|(T_s f)(t) - (T_{s_0} f)(t)| = |f(t-s) - f(t-s_0)| \le \epsilon$$

となるので、$\|T_s f - T_{s_0} f\| \le \epsilon$。これすなわち

$$\lim_{s \to s_0} \|T_s f - T_{s_0} f\| = 0$$

である。

一般の $f \in C_0(\mathbb{R})$ に対しては、$\forall \epsilon$, $g \in C_c(\mathbb{R})$ を

$$\|f - g\| \le \epsilon$$

ととる。そして $\delta > 0$ を

$$|s - s_0| \le \delta \Rightarrow \|T_s g - T_{s_0} g\| \le \epsilon$$

となるようにとれば、

$$\begin{aligned}
\|T_s f - T_{s_0} f\| &\le \|T_s f - T_s g\| + \|T_s g - T_{s_0} g\| + \|T_{s_0} g - T_{s_0} f\| \\
&= 2\|f - g\| + \|T_s g - T_{s_0} g\| \\
&\le 3\epsilon.
\end{aligned}$$

これすなわち、

$$\lim_{s \to s_0} \|T_s f - T_{s_0} f\| = 0.$$

□

近似 δ 関数 (approximate δ-function) とは、連続関数列 $\{0 \leq \delta_n \in C_0(\mathbb{R})\}$ で、

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1,$

(ii) $\displaystyle\forall r > 0, \lim_{n \to \infty} \int_{|t| \geq r} |\delta_n(t)| dt = 0$

となるもののこと。

このような関数 (列) は色々あって、例えば

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n - n^2|t| & \text{if } 0 \leq |t| \leq 1/n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

他にも、

$$\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}$$

あるいは、

$$\delta_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{I_n}(1 - t^2)^n & \text{if } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

がそうである。但し。

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt$$

である。

問 14. 上の例が実際近似 δ 関数であることを確かめよ (実感せよ)。

問 15.

(i) 部分積分を使って

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad I_n = \frac{2}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

を示せ。

(ii) Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ を使って、

$$I_n \sim \frac{2}{2n+1} \sqrt{\pi n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

を示せ。

命題 3.3. $f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して、

$$f_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(s-t) dt$$

とおく。このとき、

(i) $f_n \in C_0(\mathbb{R})$ であり、

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} d_n * f = f \quad \mathit{in}\ C_0(\mathbb{R}).$$

Proof. (ii) だけ示す。

$$f_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(s-t) dt,$$
$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(s) dt$$

であるから、

$$\begin{aligned}
|f_n(s) - f(s)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) |f(s-t) - f(s)| dt \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \|T_t f - f\| dt \\
&= \int_{|t|\ge r} \delta_n(t) \|T_t f - f\| dt + \int_{|t|\le r} \delta_n(t) \|T_t f - f\| dt \\
&\le 2\|f\| \int_{|t|\ge r} \delta_n(t) dt + \epsilon \int_{|t|\le r} \delta_n(t) dt \\
&\le 2\|f\| \int_{|t|\ge r} \delta_n(t) dt + \epsilon
\end{aligned}$$

よりわかる。 □

定理 3.4 (Weierstrass). 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(t)$ に対して、多項式関数の列 $\{f_n(t)\}_{n\geq 1}$ で、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

となるものが存在する。

Proof. $b-a<1$ について示す。一般の場合はスケール変換による。$\varphi \in C[a,b]$ を $f \in C_0(\mathbb{R})$ に拡張して、$f(t) \neq 0 \Rightarrow t \in [a-\epsilon, b+\epsilon]$ であるとする。

このとき、$a \leq s \leq b$, $u \in [a-\epsilon, b+\epsilon]$ であれば

$$s-u \in [a-b-\epsilon, b-a+\epsilon]$$

であるから、$b-a+\epsilon \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\delta_n * f)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) f(s-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(s-u) f(u)du \\ &= \frac{1}{I_n}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-(s-u)^2)^n f(u)du\end{aligned}$$

は、s の多項式である。 □

上の証明方法は、n 変数の場合にまで容易に一般化することができて、次を得る。

定理 3.5. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のなかの有界閉部分集合 K に対して、K の上で定義された連続関数は、多項式関数によって一様に近似可能である。

Bernstein の確率論的証明

ここで、話題を変えて、有限確率論の話を少しばかり。有限確率分布

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
p_0	p_1	$\ldots$	p_n

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$$

に対して、期待値、分散、範囲の確率が

$$\mu = \sum_{j=0}^{n} x_j p_j,$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{n} (x_j - \mu)^2 p_j$$

$$P(a \le X \le b) = \sum_{a \le x_j \le b} p_j$$

で与えられる。

このとき、$r > 0$ に対して、Chebyshev の不等式

$$P(|X - \mu| > r\sigma) \le \frac{1}{r^2}$$

が成り立つ。

実際、

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 p_j &= \sum_{|x_j - \mu| \ge r\sigma} (x_j - \mu)^2 p_j + \sum_{|x_j - \mu| \le r\sigma} (x_j - \mu)^2 p_j \\ &\ge (r\sigma)^2 \sum_{|x_j - \mu| \ge r\sigma} p_j \\ &= (r\sigma)^2 P(|X - \mu| > r\sigma). \end{aligned}$$

二項分布

$$x_j = j, \quad p_j = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad 0 \le t \le 1$$

の場合は、

$$\mu = nt, \qquad \sigma^2 = nt(1-t)$$

であるので、

$$\sum_{|j - nt| \ge n\delta} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \le \frac{t(1-t)}{\delta^2 n} \le \frac{1}{4\delta^2 n}$$

なる不等式が成り立つ。

さて、与えられた連続関数 $f \in C[0,1]$ に対して、Bernstein は、

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

なる n 次の多項式を考えた。

命題 3.6 (Bernstein).

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad in\ C[0,1]$$

である。

Proof. 二項定理から、

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

となるので、$f_n(t)$ との差を考えると、

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_n(k/n) - f(t)| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

である。n を大きくするとき、この右辺の量が t に無関係に 0 に近づくことを示したい。

そのために、f の一様連続性を使って、$\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$,

$$|t - t'| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \epsilon$$

とする。このような δ に対して、k についての和を二つの部分

$$\sum{}' = \sum_{|t-k/n|<\delta}, \qquad \sum{}'' = \sum_{|t-k/n|\geq\delta}$$

に分けると、

$$\sum{}' = \sum_{|t-k/n|<\delta} |f(k/n) - f(t)| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \epsilon,$$

$$\sum{}'' \leq 2M \sum_{|t-k/n|\geq\delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{2M}{4\delta^2 n}$$

となるので、$n \geq \frac{M}{2\epsilon\delta^2}$ ととれば、

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2\epsilon, \quad 0 \leq t \leq 1$$

となって、めでたい。 □

4　ヒルベルト空間

半正値内積とシュワルツ（Schwarz）の不等式。

内積からノルムへ。

完備な内積空間を**ヒルベルト空間** (Hilbert space) と呼ぶ。

例として、数列空間 ℓ^2、連続関数の作る空間 $C[a,b]$.

連続関数の作るベクトル空間 $C[a,b]$ には、これまで２つのノルムが導入されたことになるので、区別して

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|; a \le t \le b\},$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

と書く。

問 16. 不等式 $\|f\| \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$ を示せ。

この２つのノルムは根本的に異なる。例えば、区間 $[0,1]$ で、

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{if } 0 \le t \le 1/n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、

$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad \|f_n\|_2 = \frac{1}{3n}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$$

となって、同じ関数列 $\{f_n\}$ でもノルムを取り替えると収束の意味が変わってくる。

問 17. 有限次元ではこのようなことは起こらない。何故か。

問 18. ℓ^2 の別のノルムとして、

$$\|a\|_\infty = \max\{|a(n)|; n \ge 1\}$$

を考えると、$\|a\|_\infty$ と $\|a\|_2$ の間に何か関係はあるか？また、数列の列 $\{a_n\}$ で、

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_2 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_\infty = 0$$

となるものを作れ。

連続関数の空間 $C[a,b]$ においては、ノルム $\| \|_\infty$ は完備であった。一方、ノルム $\| \|_2$ の方は完備にならない。その場合でも、関数の範囲を二乗可積分なものに広げることにより、完備な内積空間に拡大することができる。

$$C[a,b] \subset L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}; \int_a^b |f(t)|^2 < +\infty\}.$$

こういった操作を完備化と称する。（右辺の $L^2(a,b)$ には連続関数以外のものが含まれることに注意。）

例えば、有理数の作る集合を通常の距離に関して完備化したものが、実数の作る集合である（Cantor の実数論)。

例題 4.1. 数列空間 ℓ^2 は内積から決まるノルムに関して完備である。

これは、$C[a,b]$ （のノルム $\| \|_\infty$）の完備性の証明と同じような方針で考えればよい。要点を挙げると、

数列の列 $\{a_n(k); k, n \geq 1\}$ で、

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_m(k) - a_n(k)|^2 = 0$$

となるものから出発して、

(i) 各 k ごとに、数列 $\{a_n(k)\}_{n\geq 1}$ がコーシー列であること。

(ii) 各 k ごとに複素数 $a(k)$ を

$$a(k) = \lim_{n\to\infty} a_n(k)$$

で定めると、数列 $a = \{a(k)\}_{k\geq 1}$ は、ℓ^2 に属すること、すなわち、

$$\sum_{k\geq 1} |a(k)|^2 < +\infty$$

であること。

(iii) 列 $\{a_n\}$ は、a に収束すること、すなわち、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_n(k) - a(k)|^2 = 0$$

であること。

5 正規直交基底

以下、$\mathcal{H}$ でヒルベルト空間を表す。このように、言った場合には、$\mathcal{H}$ は通常、ベクトル空間そのものを表すが、予め内積が指定してあって、その内積から得られるノルムが完備であると理解する。

ヒルベルト空間の元 $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ が**直交**する (orthogonal) とは、$(\xi|\eta) = 0$ であること。したがって、ゼロベクトル 0 は、任意のベクトルと直交することになる。さらに、ヒルベルト空間の部分集合 $S \subset \mathcal{H}$ に対して、

$$S^{\perp} = \{\xi \in \mathcal{H}; (\xi|\eta) = 0 \forall \eta \in S\}$$

とおく。

集合 $S^{\perp}$ はヒルベルト空間の閉部分空間である。

ベクトルの列 $\{e_n\}_{n\geq}$ で、

$$(e_m|e_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるものを、**正規直交系** (orthonormal system) という。正規直交系がさらに条件

$$\{e_n; n \geq 1\}^{\perp} = \{0\}$$

をみたすとき、**正規直交基底** (orthonormal basis) と呼ぶ。

シュミットの直交化 (Schmidt' orthogonalization) により、

命題 5.1. (可分な) ヒルベルト空間において、正規直交基底は必ず存在する。（全然一意的ではないが。）

正規直交基底の個数を考えているヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の**次元** といい、記号 $\dim \mathcal{H}$ で表す。

例題 5.2. ヒルベルト空間 ℓ^2 で、ベクトル列、

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$$

は正規直交基底を成す。（これを、標準基底と呼ぶ。）したがって、とくに $\dim \ell^2 = \infty$ である。

また、

$$\begin{aligned}
f_1 &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \\
f_2 &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2, \\
f_3 &= e_3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

とおくと、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ も ℓ^2 の正規直交基底である。

例題 5.3. ヒルベルト空間 $L^2(-\pi,\pi)$ において、関数列

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos nt + i\sin nt), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

は正規直交基底を成す。（１次元トーラス上の関数と Weierstrass の近似定理。）

問 19.

(i) 三角関数 $\cos nt, \sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を上の基底を用いて表せ。

(ii) 関数列

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots\right\}$$

は、$L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交基底であることを示せ。

有限次元の場合の同型定理

$$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{\dim\mathcal{H}}$$

を復習。

定理 5.4. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ を用意すると、任意のベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ は、

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n|\xi)e_n$$

と書き表わされ、等式 (*Parseval's equality*)

$$(\xi|\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}(\xi|e_n)(e_n|\eta)$$

が成り立つ。

Proof. まず、

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

なる表示が可能であれば、$x_k = (e_k|\xi)$ であることに注意。
　自然数 n に対して、

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} (e_k|\xi) e_k$$

とおくと、

$$(\xi|\xi_n) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|\xi)(\xi|e_k) = (\xi_n|\xi_n)$$

となって、Schwarz' inequality を使うと、不等式 $\|\xi_n\| \leq \|\xi\|$ がわかる。これを再び上の等式に還元してやって、極限 $n \to \infty$ を取ると、不等式 (Bessel's inequality)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k|\xi)|^2 \leq \|\xi\|^2$$

が得られる。

$$\|\xi_m - \xi_n\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |(e_k|\xi)|^2$$

であるから、上の不等式から、

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\xi_m - \xi_n\|^2 \leq \lim_{m,n\to\infty} |(e_k|\xi)|^2 = 0$$

がわかる。すなわち、 $\{\xi_n\}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ におけるコーシー列である。完備性により、

$$\xi_\infty = \lim_{n\to\infty} \xi_n$$

が存在する。そこで、あとは、 $\xi = \xi_\infty$ がわかればよい。ここで、関係 $(e_k|\xi_n) = (e_k|\xi)$ for $n \geq k$ に注意すれば、

$$(e_k|\xi - \xi_\infty) = \lim_{n\to\infty} (e_k|\xi - \xi_n) = 0$$

がかってな $k \geq 1$ に対して成り立つので、ベクトル $\xi - \xi_\infty$ は全ての $\{e_k\}_k$ と直交し、正規直交基底の性質から、$\xi = \xi_\infty$ がわかる。

Parseval's equality については、$\eta \in \mathcal{H}$ の方も、

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k|\eta) e_k$$

と表して、

$$(\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (\xi_n|\eta_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\xi|e_k)(e_k|\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi|e_k)(e_k|\eta)$$

と計算すればよい。 □

系 5.5. 全ての（可分）ヒルベルト空間は、内積も込めて ℓ^2 と同型である。

ヒルベルト空間 $L^2(-\pi, \pi)$ の正規直交基底 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する場合は、とくに重要で、上の級数表示で変数を明示して、

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{int}, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}$$

と書き、関数 $f(t)$ のフーリエ展開 (Fourier expansion) と称する。この級数教示は、一般に各点収束しないので、不正確なものではあるが、象徴的な意味と思えばよい。$f(t)$ がなめらかな周期関数のときには、上の関数級数は一様収束することが知られている。

問 20.

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n, \quad \eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n$$

であるとき、

$$(\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (\xi_n|\eta_n)$$

を示せ。

例題 5.6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$ で関数 $\xi(t) = t$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ についてそのフーリエ係数をもとめると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} t dt = \begin{cases} 2\pi i(-1)^n/n & \text{if } n \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので、Parseval の等式は

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

を意味する。

問 21. 関数 $\xi(t)=t^2$ $(-\pi\leq t\leq\pi)$ について、Parseval の等式を計算すれば何が得られるか。

6 正射影定理

ベクトル空間 V の部分集合 K で

$$x,y\in K \quad\Longrightarrow\quad tx+(1-t)y\in K \text{ for } 0\leq t\leq 1$$

という性質をみたすものを**凸集合** (convex set) であるという。

問 22.

(i) ベクトル空間の部分空間は、凸集合

(ii) ノルム空間 V で、閉球、開球は凸集合。

(iii) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ において、

$$\{(x,y);x^2+y^2<1\}\subset K\subset\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\}$$

なる集合 K は凸集合。

補題 6.1 (中線定理). 内積空間のベクトル x, y に対して、

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

定理 6.2 (端点定理). ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の凸閉集合 K と点 $y\in\mathcal{H}$ に対して、K 上の関数

$$K\ni x\mapsto\|x-y\|$$

を最小にする点 x が丁度一つだけ存在する。

Proof. 与えられた点 $y \notin K$ に対して、

$$\mu = \inf\{\|x-y\|; x \in K\}$$

とおくと、K 内の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で、

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \mu$$

となるものを取ってこれる。

このとき、$\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ のコーシー列である。というのは、

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|^2 &= \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 \\
&= 2\|x_m - y\|^2 + 2\|x_n - y\|^2 - 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2} - y\right\|^2 \\
&\leq 2\|x_m - y\|^2 + 2\|x_n - y\|^2 - 4\mu^2 \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

そこで、ヒルベルト空間の完備性により、

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

が存在する。

一方、K は閉集合であったから、$x_\infty \in K$ であり、

$$\|x_\infty - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \mu$$

となって、最小点の存在がわかる。

ひとつしかないことは、仮に最小点 $x \in K$ がもうひとつあったとすると、

$$\|x_\infty x\| = 2\|x_\infty - y\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{x_\infty + x}{2} - y\right\|^2 \leq 2\mu^2 + 2\mu^2 - 4\mu^2 = 0$$

となって $x = x_\infty$ がわかる。 □

定理 6.3 (直交分解定理). ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 E に対して、任意の元 $x \in \mathcal{H}$ は、

$$x = y + z, \quad y \in E,\ z \in E^\perp$$

と一意的に分解される。

Proof. E 上の関数

$$E \ni y' \mapsto \|y' - x\|^2$$

が $y \in E$ で最小値になったとする。このとき、$z = x - y \in E^\perp$ である。実際、任意のベクトル $a \in E$ に対して、２次関数

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \|y + at - x\|^2$$

は、$t = 0$ で最小でなければならないので（$y' = y + ta$ と思う）、

$$(a|x-y) + (x-y|a) = 0, \qquad a \in E$$

となる。a を ia で置き換えると、これらから、$(a|x-y) = 0$ となって、$x - y \in E^\perp$ がわかる。一意性は、$E \cap E^\perp = \{0\}$ による。 □

7　線型汎関数

ベクトル空間 ($\mathbb{C}$ 上の) V を考える。V 上の (複素数値) 関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ で、

$$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w), \quad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$$

となるものを**線型汎関数** (linear functional) という。

例題 7.1.

(i) $V = \mathbb{C}^n$ （縦ベクトルの空間）のときは、線型汎関数 $\varphi : V \to \mathbb{C}$ は、

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \varphi_j v_j$$

の形。

(ii) V がヒルベルト空間のとき、$v \in V$ に対して、線型汎関数 v^* を

$$v^*(v') = (v|v'), \quad v' \in V$$

で定めることができる。

例題 7.2. バナッハ空間 $C[a,b]$ において、

(i) 与えられた点 $c \in [a,b]$ に対して、

$$f \mapsto f(c).$$

あるいは、これを少し一般化して、$[a,b]$ 内の与えられた点列 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と数列 $w_1, \ldots, w_n$ に対して、

$$f \mapsto \sum_{j=1}^{n} w_j f(t_j).$$

(ii) 与えられた可積分関数 $h(t)$ に対して、

$$f \mapsto \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

以上はいずれも線型汎関数。

上の例の (ii) のタイプの線型汎関数として、リーマン和

$$f \mapsto R_n(f) = \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})f(t_j)$$

を捉えることができる。一方で、(iii) のタイプの汎関数には、リーマン積分（いわゆる定積分）

$$f \mapsto R(f) = \int_a^b f(t)dt$$

が含まれ、連続関数 f に対しては、

$$R(f) = \lim_{n\to\infty} R_n(f)$$

が成り立っている。

汎関数も関数の一種なので、上のリーマン積分の存在定理は、汎関数の収束なるものになっているのではないか、と期待される。このような汎関数の位相を調べる前に、汎関数そのものの連続性をまず考えてみよう。

ベクトル空間 V にノルムが与えられ、ノルム空間であるときに、線型汎関数 $f : V \to \mathbb{C}$ が**連続** (continuous) であるとは、

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(v)$$

が成り立つこと。ノルム空間 V の連続な汎関数全体を V^* で表すと、V^* は、演算

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

によりベクトル空間になる。これを V の**双対空間** (dual space) と呼ぶ。この段階では、$V^* \neq \{0\}$ かどうかさえ不明であることに注意しよう。すぐ後で、V^* が十分大きいベクトル空間であることがわかるのであるが。

例題 7.3. リーマン積分 $f \mapsto R(f)$ は連続である。これは、関数が一様収束するとき、積分と極限の順序交換可能、という定理の言い換えにすぎない。

定義 7.4. ノルム空間 V 上の線型汎関数 f が**有界** (boundend) であるとは、

$$\{|f(v)|; v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

が有界集合で有ること、すなわち、ある正数 $M > 0$ があって

$$\|v\| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(v)| \leq M$$

となること。

補題 7.5. ノルム空間の線型汎関数 φ に対して、*(i)* φ が連続であること、*(ii)* φ が有界であること、*(iii)* $\varphi^{-1}(0)$ が閉集合であること、は全て同値である。

Proof. $\ker\varphi$ が閉集合であるとして、

$$p(v) = \inf\{\|v + x\|; x \in \varphi^{-1}(0)\}$$

とおくと、$p(v) = 0 \iff v \in \varphi^{-1}(0)$ であり $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$、$p(v) \leq \|v\|$ である。そこで、$w \in V$ を $\varphi(w) = 1$ と取ると、

$$V = \varphi^{-1}(0) + \mathbb{C}w$$

であるから、

$$|\varphi(x + \lambda w)| = |\lambda| = \frac{|\lambda| p(w)}{p(w)} = \frac{p(\lambda w)}{p(w)} = \frac{p(x + \lambda w)}{p(w)} = \frac{p(v)}{p(w)} \leq \frac{1}{p(w)} \|v\|.$$

□

有界な汎関数 f に対して、

$$\|f\| = \sup\{|f(v)|; v \in V, \|v\| \le 1\}$$

とおく。記号が示唆するように、$\|f\|$ は、双対空間 V^* のノルムになる。

補題 7.6.

$$\|f\| = \inf\{M > 0; |f(v)| \le M\|v\| \textit{ for any } v \in V\}.$$

命題 7.7. 双対空間 V^* は、ノルム $\|f\|$ によりバナッハ空間になる。

Proof. $\|f\|$ がノルムであることは、上の補題とかからすぐわかる。これが完備であることも、これまでの完備性の証明のパターンでわかる。

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0$$

とすると、かってな $v \in V$ に対して、$\{f_n(v)\}_{n\ge1}$ が (複素）コーシー列になり、複素数の完備性から、

$$f(v) = \lim_n f_n(v)$$

が存在する。極限をとるまえの関数 f_n が線型であることから、極限関数 f も線型。

f の有界性は、$\forall\epsilon > 0$, 十分大きい m, $n \ge N$ に対しては、

$$\|f_m(v) - f_n(v)\| \le \|f_m - f_n\|\|v\| \le \epsilon\|v\|$$

がかってな v について成り立つので、$m \to \infty$ とすれば、

$$\|f(v) - f_n(v)\| \le \epsilon\|v\|$$

なる不等式が得られ、これは線型汎関数 $f - f_n$ が有界で、

$$\|f - f_n\| \le \epsilon, \forall n \ge N$$

を意味するから、$f = (f - f_n) + f_n$ も有界で、さらに

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$$

となる。 □

定理 7.8 (F. Riesz). ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の連続な汎関数　$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ はいつでもあるベクトル $z \in \mathcal{H}$ を使って、$f(x) = (z|x)$, $x \in \mathcal{H}$ と書ける (以前の記号で書くと、$f = z^*$)。さらに、 z は、f により一意的に決まり、$\|f\| = \|z\|$ をみたす。

Proof. $E = \{y \in \mathcal{H}; f(y) = 0\}$ とおくと、E は $\mathcal{H}$ の閉部分空間。$E = \mathcal{H}$ のときには、$z = 0$ ととればよいので、$E \neq \mathcal{H}$ とする。直交分解定理により、$\mathcal{H} = E + E^\perp$ である。

さて $E^\perp$ が 1 次元であることを示そう。実際、$0 \neq z_j \in E^\perp$ $(j = 1, 2)$ とすると、$f(z_j) \neq 0$ であり、$f(z_1)^{-1}z_1 - f(z_2)^{-1}z_2 \in \ker f$ であるから、これは 0 である。

次に 長さ 1 のベクトル $z_0 \in E^\perp$ を取ってきて、$z = \lambda z_0$ を、$(z|z_0) = f(z_0)$ をみたすように取る。すなわち、$\lambda = \overline{f(z_0)}$. このとき、$\mathcal{H}$ の任意のベクトル x を $x = y + \mu z_0$ と書き表すと、

$$f(x) = \mu f(z_0) = \mu(z|z_0) = (z|x)$$

となって、$z \in E^\perp$ が求めるもの。

一意性は、$y' + z'$ も z と同じ性質をもつとすると、$y' \in E^\perp$ かつ $(z'|z_0) = (z|z_0)$ となって、$y' = 0$, $z' = z$ である。

最後にノルムの計算であるが、シュワルツの不等式から、

$$|(z|x)| \leq \|z\| \, \|x\| = \|z\| \quad \text{if } \|x\| \leq 1$$

であり、一方 $z = (z_0|z)z_0$ から $\|z\| = |(z|z_0)|$ となって、

$$|(z|z_0)| = \|z\|$$

となる。以上を合わせると、求める等式が得られる。 □

この定理の意味は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対しては、その双対空間を $\mathcal{H}^*$ とすると、

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto x^* \in \mathcal{H}^*$$

なる全単射があって、

(i) 共役線型である、

(ii) ノルムを保存する、

といった性質をもつ。

従って、内積

$$(x^*|y^*) = (y|x), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

により、 $\mathcal{H}^*$ もヒルベルト空間になる。

さて、$\mathcal{H}^{**}$ を考えると、

$$x \mapsto x^* \mapsto x^{**}$$

なる対応が考えられる。その具体的な定義は、

$$x^{**}(y^*) = (x^*|y^*) = (y|x) = y^*(x)$$

で与えられる。対応 $x \mapsto x^{**}$ は線型同型なので、x と x^{**} を同一視することにより、通常、$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ とみなす。

有限次元の数ベクトル空間においては、V を縦ベクトル空間とすると、V^* は横ベクトル空間となり、V^{**} は再び縦ベクトル空間に戻る。これが上で述べた $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ に相当する。

さて、ノルム空間 V に対して、V^* はバナッハ空間であった。さらに、V^* の双対 V^{**} も再びバナッハ空間になる。$v \in V$ に対して、 線型汎関数 $v^{**} : V^* \to \mathbb{C}$ をヒルベルト空間のときの公式に倣って、

$$v^{**}(f) = f(v), \quad f \in V^*$$

で定めると、$|f(v)| \leq \|f\|\|v\|$ により、v^{**} は連続で、$\|v^{**}\| \leq \|v\|$ がわかる。さらに、対応 $v \mapsto v^{**}$ は線型かつ一対一である。

V が有限次元のときには、次元を比較することにより、これは全射であることがわかるが、無限次元のときには、正しくない場合もある（というか、正しくない場合が普通である）。

例題 7.9. バナッハ空間

$$V = \{v = \{v_n\}_{n\geq 1}; \lim_{n\to\infty} v_n = 0\}, \|v\| = \max\{|v_n|; n \geq 1\}$$

においては、

$$V^* = \{v^* = \{v_n^*\}_{n\geq 1}; \sum_{n\geq 1} |v_n^*| < +\infty\}, \|v^*\| = \sum_n |v_n^*|$$

でありさらに

$$V^{**} = \{a = \{a_n\}; \sup_n |a_n| < +\infty\}, \|a\| = \sup_n |a_n|.$$

このように、一般に $V \subset V^{**}$ である。さらに上の例では、$\|v^{**}\| = \|v\|$ が成り立っている。これは、単なる偶然であろうか。

もし、このことを確かめようと思ったら、勝手な $v \in V$ に対して、

$$\sup\{|f(v)|; f \in V^*, \|f\| \leq 1\} = \|v\|$$

を示す必要がある。

補題 7.10. *Let V be a real vector space with a seminorm $\|\cdot\|$ and W be a subspace. Let $f : W \to \mathbb{R}$ be a linear functional such that*

$$|f(w)| \leq \|w\| \quad \textit{for } w \in W.$$

Then, for any given $v \notin W$, we can extend f to a linear functional on $W + \mathbb{R}v$ so that the above inequality remains valid for elements in $W + \mathbb{R}v$.

Proof. By the real linearity, the inequality in question is equivalent to

$$f(w) \leq \|w\|.$$

Since any linear extension to $W + \mathbb{R}v$ is specified by the real number $c = f(v)$, the problem is whether we can choose it so that

$$f(w + \lambda v) \leq \|w + \lambda v\|, \quad \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Now, letting $\lambda = t_2$ or $\lambda = -t_1$ with $t_1, t_2 > 0$, the condition is equivalent to

$$-\frac{\|w_1 - t_1 v\| - f(w_1)}{t_1} \leq c \leq \frac{\|w_2 + t_2 v\| - f(w_2)}{t_2}$$

for $t_1, t_2 > 0$ and $w_1, w_2 \in W$.

So, if we could find such a real c, then we should have the inequality

$$-\frac{\|w_1 - t_1 v\| - f(w_1)}{t_1} \leq \frac{\|w_2 + t_2 v\| - f(w_2)}{t_2}$$

for any $t_1, t_2 > 0$ and any $w_1, w_2 \in W$.

Conversely, if we can show the above inequality, then

$$c_1 = \sup\{-\frac{\|w - tv\| - f(w)}{t}; t > 0, w \in W\},$$
$$c_2 = \inf\{\frac{\|w + tv\| - f(w)}{t}; t > 0, w \in W\}$$

satisfy $c_1 \leq c_2$ and any $c \in [c_1, c_2]$ does the job.

Now the target inequality is

$$-t_2\|w_1 - t_1 v\| + t_2 f(w_1) \leq t_1\|w_2 + t_2 v\| - t_1 f(w_2),$$

i.e.,

$$t_2 f(w_1) + t_1 f(w_2) \leq t_1\|w_2 + t_2 v\| + t_2\|w_1 - t_1 v\|,$$

which is checked by

$$t_2 f(w_1) + t_1 f(w_2) = f(t_2 w_1 + t_1 w_1) \leq \|t_2 w_1 + t_1 w_2\| \leq t_1\|w_2 + t_2 v\| + t_2\|w_1 - t_1 v\|.$$

□

Repeating the above result (Zorn's lemma or just the ordinary induction when V is separable), we have

系 7.11. *Under the same assumption in the above lemma, we can extend the linear functional $f : W \to \mathbb{R}$ to a linear functional of V so that*

$$f(v) \leq \|v\| \quad \textit{for } v \in V.$$

定理 7.12 (Hahn-Banach). *Let V be a complex vector space with a norm $\|\cdot\|$ and W be a subspace of V. Let $\varphi : W \to \mathbb{C}$ be a linear functional of W such that $|\varphi(w)| \leq \|w\|$ for $w \in W$. Then φ can be extended to a linear functional of V so that $|\varphi(v)| \leq \|v\|$ for $v \in V$.*

Proof. Let $f = \mathrm{Re}(\varphi)$. Then

$$\varphi(v) = f(v) - if(iv)$$

and the real-linear functional f satisfies $|f(w)| \leq \|w\|$ for $w \in W$. Aplly-ing the lemma, we can find a real-linear functional $F : V \to \mathbb{R}$ so that $f(w) = F(w)$ for $w \in W$ and $|F(v)| \leq \|v\|$.

Now set

$$\Phi(v) = F(v) - iF(iv),$$

which is complex-linear and is an extension of φ. Moreover, letting $\Phi(v) = |\Phi(v)|e^{i\theta}$, we have

$$|\Phi(v)| = e^{-i\theta}\Phi(v) = \Phi(e^{i\theta}v) = F(e^{-i\theta}v) \le \|e^{-i\theta}v\| = \|v\|.$$

□

系 7.13. *Given any $w \in V$, we can find a non-trivial $\varphi \in V^*$ satisfying*

$$\varphi(w) = \|w\|\|\varphi\|.$$

Proof. Starting with the functional $\varphi : \mathbb{C}w \to \mathbb{C}$ defined by $\varphi(w) = \|w\|$, we extend it to the whole space V so that $|\varphi(v)| \le \|v\|$. Then $\|\varphi\| = 1$ and the assertion is clear. □

Remark . Assume the separability of the normed space V and $\{v_n\}_{n\ge1}$ be a countable dense set. Then, by an induction with repeating use of the lemma, we can find a subsequence $\{n_k\}_{k\ge1}$ and linear functionals $f_k : W_k \to \mathbb{R}$, where $W_k = W + \mathbb{R}v_{n_1} + \dots + \mathbb{R}v_{n_k}$, so that

$$v_1, v_2, \dots, v_{n_k} \in W_k, \qquad f_k(w) \le \|w\| \quad \text{for } w \in W_k.$$

Then

$$W_\infty = \bigcup_{k\ge1} W_k$$

is a dense linear subspace of V with the well-defined linear functional $f_\infty : W_\infty \to \mathbb{R}$ satisfying $f_\infty(w) \le \|w\|$.

By this inequality f_∞ is uniquely extended to a continuous linear functional $f : V \to \mathbb{R}$.

8 スティルチェス積分

パラメータ表示された曲線 $p(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$ の長さの定義について考えよう。曲線の折れ線近似は、$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ なる点列 $\Delta = \{t_j\}$ を用意して

$$p(t_0), p(t_1), \dots, p(t_n)$$

という $n+1$ 個の点を線分で結ぶことで得られる。この折れ線の長さは、

$$\sum_{j=1}^{n} |p(t_j) - p(t_{j-1})|$$

で与えられるので、折れ線の間隔

$$|\Delta| = \max\{t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_{n-1}\}$$

を小さくしたとき、この和がある数に近づくならば、それが「曲線の長さ」にふさわしいものであろう。折れ線の間隔は細かくすればするほど長さがふえるので（なぜ？三角不等式！）、曲線の長さが存在する条件は

$$\sup_{\Delta} \left\{ \sum_j |p(t_j) - p(t_{j-1})| \right\} < +\infty$$

となる。

仮に $p(t)$ が t の連続関数であっても曲線の長さが無限大になることがある（折りたたみ曲線）。曲線の長さが存在するような（ベクトル値）関数 $p(t)$ のことを C. Jordan に従って**有界変動関数** (function of bounded variation) と呼ぶ。

この考え方を通常の関数 $h(t)$, $a \le t \le b$ に適用すると

$$\sum_{j=1}^{n} |h(t_j) - h(t_{j-1})| \le M$$

となる分割 $\Delta = \{t_j\}$ に無関係な数 $M > 0$ があるとき、関数 h を有界変動関数と呼ぶことになる。

$$\max\{|x(s) - x(t)|, |y(s) - y(t)|\} \le \|p(s) - p(t)\| \le |x(s) - x(t)| + |y(s) - y(t)|$$

であるから、$p(t)$ が有界変動であることは、その成分 $x(t)$, $y(t)$ が有界変動ということに他ならない。これにより有界変動関数の性質は実数値関数のそれに帰着される。

そして、この実数値関数の場合には、以下のようなより詳しいことがわかる。一般に実数 x に対して、

$$|x|_{\pm} = \begin{cases} |x| & \text{if } \pm x \ge 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、

$$|x| = |x|_+ + |x|_-, \qquad x = |x|_+ - |x|_-.$$

この関係を $x = h(t_j) - h(t_{j-1})$ に使って和をとれば、

$$\sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})| = \sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})|_+ + \sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})|_-,$$

$$h(b) - h(a) = \sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})|_+ - \sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})|_-,$$

すなわち

$$\pm(h(b) - h(a)) + \sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})| = 2\sum_j |h(t_1) - h(t_{j-1})|_\pm$$

となるので、

$$\sum_{j=1}^n |h(t_1) - h(t_{j-1})|$$

が有界であることと、

$$\sum_{j=1}^n |h(t_1) - h(t_{j-1})|_+, \quad \sum_{j=1}^n |h(t_1) - h(t_{j-1})|_-$$

が有界であることが同値になる。さらに、

$$V(h) = \sup_\Delta \left\{ \sum_{j=1}^n |h(t_1) - h(t_{j-1})| \right\}, \quad V_\pm(h) = \sup_\Delta \left\{ \sum_{j=1}^n |h(t_1) - h(t_{j-1})|_\pm \right\}$$

とおけば

$$V(h) = V_+(h) + V_-(h), \qquad h(b) - h(a) = V_+(h) - V_-(h)$$

が成り立つ。（関数 h のグラフの形の山を上り下りしていると思えば、V_+ は上りの垂直移動量、$V(h)$ は総垂直移動量を表している。）そこで、

$$h_\pm(t) = V_\pm(h|_{[a,t]})$$

とおけば、これらは t について単調増加 $(t \le t' \Longrightarrow h_\pm(t) \le h_\pm(t'))$ で、

$$h(t) = (h_+(t) + h(a)) - h_-(t)$$

が２つの単調増加関数の差で表された（Jordan 分解）。

問 23.

(i) 単調関数は有界変動である。

(ii) 有界変動関数の１次結合も有界変動関数である。（有界変動関数全体はベクトル空間を成す。）

有界閉区間 $[a,b]$ 上の（複素数値）有界変動関数 h と（複素数値）連続関数 f が与えられたときリーマン積分の定義に倣って、

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)(h(t_j) - h(t_{j-1})), \qquad x_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

なる量を考える。このとき、連続関数の定積分の存在とまったく同じようにして、極限

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(h(t_j) - h(t_{j-1}))$$

の存在がわかる。これを

$$\int_a^b f(t) dh(t)$$

と書いて、**スティルチェス積分** (Stieltjes integral) と呼ぶ。

問 24. 上の極限の存在を確かめよ。

スティルチェス積分の性質をいくつか挙げておくと、

(i)

$$\left| \int_a^b f(t) dh(t) \right| \leq \|f\| V(h).$$

(ii)

$$(f, h) \mapsto \int_a^b f(t) dh(t)$$

は双線型。

(iii)

$$\int_a^b f(t)dh(t) = \int_a^c f(t)dh(t) + \int_c^b f(t)dh(t), \quad a \le c \le b.$$

(iv) h がなめらかなときは、

$$\int_a^b f(t)dh(t) = \int_a^b f(t)\frac{dh}{dt}(t)dt.$$

単調関数の性質

- 不連続点は可算個である。
- 不連続点での値を変更して、右連続関数に作り変えることができる。

単調増加関数 h についてこのことを確かめよう。不連続点 t でのジャンプの量を

$$h(t+0) - h(t-0) = \lim_{\epsilon \to +0} h(t+\epsilon) - \lim_{\epsilon \to +0} h(t-\epsilon) > 0$$

で定義すれば、

$$\sum_j (h(t_j+0) - h((t_j-0)) \le h(b) - h(a)$$

となるので、このような t_j の個数は高々可算である。より、丁寧に述べると、任意の $n \ge 1$ に対して

$$h(t+0) - h(t-0) \ge \frac{1}{n}$$

となる t は有限個で、不連続点全体は

$$\bigcup_{n \ge 1} \left\{ t \in [a,b]; h(t+0) - h(t-0) \ge \frac{1}{n} \right\}$$

と表示される。

補題 8.1. 有界変動関数 $h(t)$ においては不連続点は可算個で、境界点以外の不連続点での h の値の取り方はスティルチェス積分

$$\int_a^b f(t)dh(t)$$

の値に影響しない。(不連続点 t $(a < t < b)$ で関与するのは、ジャンプ量 $h(t+0) - h(t-0)$ のみ。)

Proof. 不連続点が可算個であるのは、Jordan 分解と単調関数の性質からわかる。また、このことからスティルチェス積分の近似和の分点として、不連続点をさけることが可能で、したがってその極限値は不連続点での値に関係しない。 □

問 25. $t = 1/2$ で不連続な単調増加関数 h に対して、スティルチェス積分

$$\int_0^1 f(t)dh(t)$$

を通常の積分と $f(1/2)$ で表せ。

補題 8.2. 有界変動関数 h に対して、

$$h(s+0) - h(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dh(t).$$

ここで、 $0 \leq f_n \leq 1$ は、

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \textit{if } a \leq t \leq s + 1/n, \\ 0 & \textit{if } s + 2/n \leq t \leq b \end{cases}$$

をみたす連続関数。

Proof. 関数 $f_n(t)$ の取り方から、

$$\int_a^b f_n(t)dh(t) = h(s+1/n) - h(a) + \int_{s+1/n}^{s+2/n} f_n(t)dh(t)$$

となるので、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{s+1/n}^{s+2/n} f_n(t)dh(t) = 0$$

を示せばよい。このために、h のジョルダン分解 $h(t) = h_+(t) - h_-(t)$ を使うと、

$$0 \leq \int_{s+1/n}^{s+2/n} f_n(t)dh_\pm(t) \leq h_\pm(s+2/n) - h_\pm(s+1/n)$$

となるので、

$$\lim_{n\to\infty} (h_\pm(s+2/n) - h_\pm(s+1/n)) = h_\pm(s+0) - h_\pm(s+0) = 0$$

からわかる。

□

定理 8.3 (Riesz-Markov-Kakutani). 連続線型汎関数 $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ はスティルチェス積分表示をもつ。

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dh(t).$$

実数直線 $\mathbb{R}$ 上定義された有界変動関数 h は、(i) 右連続で (ii) $h(t) = 0$ $(t < a)$ かつ (iii) $h(t) = h(b)$ $(t \geq b)$ という条件を課しておけば、一意的で、対応 $\varphi \mapsto h$ は線型である。

さらに、φ が正のときは、h として単調増加関数がとれる。

Proof. 有限閉区間 $[a,b]$ 上の右連続関数で不連続点が有限個からなるものを $\widetilde{C}$ で表すと、これは、ノルム

$$\|f\| = \sup\{|f(t)|; a \leq t \leq b\}$$

によりノルム空間であり、$C_{\mathbb{R}}[a,b]$ を含む。

そこで、φ に Hahn-Banach の拡張定理を適用すれば、連続汎関数 $\widetilde{\varphi} : \widetilde{C} \to \mathbb{R}$ で φ の拡張になっているものが存在する。さて、

$$h(t) = \widetilde{\varphi}(1_{[a,t)})$$

とおくと、これは有界変動である。実際、

$$\begin{aligned}\sum_j |h(t_j) - h(t_{j-1})| &= \left|\sum_j \pm(h(t_j) - h(t_{j-1}))\right| \\ &= \left|\widetilde{\varphi}\left(\sum_j \pm 1_{[t_{j-1},t_j)}\right)\right| \\ &\leq \|\widetilde{\varphi}\|.\end{aligned}$$

一方、$f \in C[a,b]$ に対して、$[a,b]$ の n 当分点を t_j で表し、関数

$$g_n = \sum_j f(x_j) 1_{[t_{j-1},t_j)}, \qquad x_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

の不連続点を連続化したものを f_n で表せば、連続関数 f の一様連続性により、$\|f_n - f\| \leq \epsilon_n \to 0$、$\|f_g - f_n\| \leq \epsilon_n \to 0$ となるので、

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\varphi}(f_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\varphi}(g_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j)(h(t_j) - h(t_{j-1})) = \int_a^b f(t)dh(t)$$

となって、めでたい。

一意性および正値性は、前の補題からわかる。 $\square$

系 8.4. 円周 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の連続関数の作るバナッハ空間 $C(\mathbb{T})$ の上で定義された連続線型汎関数 $\varphi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ に対して、閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の右連続有界変動関数 $h(t)$ で

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) dh(t)$$

となるものが存在し、定数の差を除いて一意的に定まる。

<u>測度との関係</u>

閉区間 $[a, b]$ における測度 μ が与えられると、

$$h(t) = \mu([a, t])$$

により単調増加右連続関数が得られる。逆に、単調増加右連続関数 h が与えられると、$[a, b]$ における測度 μ で関係

$$\int_a^b f(t) dh(t) = \int_{[a,b]} f(t) \mu(dt)$$

をみたすものが一意的に存在する。したがって、スティルチェス積分において、積分の値に効いてくるのは、$h(t)$ そのものではなく、上のようにして定まる測度 μ であって、有限測度 μ と、$\varphi : C_{\mathbb{R}}[a, b] \to \mathbb{R}$ で、

(i) $f \geq 0$ ならば $\varphi(f) \geq 0$,

(ii) $\|\varphi\| < +\infty$

となるものが 1 対 1 に対応する。

とくに、関数

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < s, \\ 1 & \text{if } t \geq s \end{cases}$$

に対応する測度は、

$$\int f(t) \mu(dt) = f(s)$$

で与えられ、点 $s \in \mathbb{R}$ における **Dirac 測度**と呼ばれる。

9　線型作用素

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ について考える。とりあえず $\mathcal{H}$ は有限次元であるとして、その正規直交基底 $\{e_j\}_{1\leq j\leq n}$ を用意すれば、関係

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, \qquad (Te_1, \ldots, Te_n) = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

により、T の行列表示 $[T] = (t_{ij})$ を得る。この対応は、

$$[S+T] = [S] + [T], \qquad [ST] = [S][T]$$

を満たすので、$\mathcal{H}$ 上の線型作用素の代数構造は行列のそれと同じである。

問 26. これを確かめよ。

複素数 λ が線型作用素 T の**固有値** (eigenvalue) であるとは、次の同値な条件を満たすことである。

(i) $T\xi = \lambda\xi$ となるベクトル $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ がある。

(ii) 作用素 $\lambda I - T$ は逆をもつ。

線型作用素の構造を論じる上で固有値の概念はとりわけ重要である。そこで、同様の考えを「無限サイズ」の行列についても適用してみようというのが、以下の要点である。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が無限次元である場合には、上の二つの条件には大きな隔たりがある。そこで、条件 (i) をみたす場合を固有値、条件 (ii) をみなす複素数を**スペクトル** (spectrum) と呼んで区別する。また T のスペクトル全体を $\sigma(T)$ で表し T のスペクトル集合と呼ぶ。固有値はスペクトルであるが、逆は必ずしも成り立たない。

例題 9.1. 線型作用素 $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ を $(Tf)(t) = tf(t), 0 < t < 1$ で定義すると、$\sigma(T) = [0,1]$ であるにもかかわらず、T の固有値は存在しない。

もうひとつ「固有値」に関連する問題として、不変部分空間の存在と分類がある。$\mathcal{H}$ の（閉）部分空間 $\mathcal{K}$ が、

$$T\xi \in \mathcal{K}, \forall \xi \in \mathcal{K}$$

をみたすとき、T の**不変部分空間** であるという。有限次元で、T が互いに異なる固有値をもつならば、T の不変部分空間と $\sigma(T)$ の部分集合との間には、一対一の対応がある。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ が（ノルム）**連続**であるとは、

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \quad \Longrightarrow \quad T\xi = \lim_{n\to\infty} T\xi_n$$

となること。

補題 9.2. 線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ について、次の 3 つは同じ量を与える。

(i) $\sup\{\|T\xi\|/\|\xi\|; \xi \neq 0\}$.

(ii) $\sup\{\|T\xi\|; \|\xi\| = 1\}$.

(iii) $\sup\{|(\xi|T\eta)|; \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1\}$.

この同一の数を $\|T\|$ と書いて T のノルムと称する。

命題 9.3. 線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ について、次は同値。

(i) T は連続である。

(ii) $\|T\| < +\infty$ である。

Proof. 証明は線型汎関数に対する同様の命題と全く同じ。(ii) $\Rightarrow$ (i) はすぐわかるし、(i) $\Rightarrow$ は次のようにする。仮に T が有界でないとすると、各自然数 n に対して、$\|T\xi_n\| \geq n\|\xi_n\|$ となる $0 \neq \xi_n \in \mathcal{H}$ を用意することができるので、

$$\eta_n = \frac{1}{n\|\xi_n\|}\xi_n \to 0$$

となって、T の連続性から、

$$\frac{1}{n\|\xi_n\|}T\xi_n = T\eta_n \to 0$$

であるべきだが、これは不等式

$$\frac{1}{n\|\xi_n\|}\|T\xi_n\| \geq 1$$

と矛盾する。 $\square$

線型作用素 T で $\|T\| < +\infty$ であるものを**有界作用素**といって、$\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す。

例題 9.4. $\mathcal{H} = \ell^2$ で、有界数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して、

$$(A\xi)_n = a_n \xi_n$$

とおくと、$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり、

$$\|A\| = \sup\{|a_n|; n \geq 1\}.$$

問 27. 上の例で、非有界数列 $\{a_n\}$ に対して A を定義しようとしても無理である、すなわち $\xi \in \ell^2$ で $A\xi \notin \ell^2$ となるものが必ず存在する。これを確かめよ。

命題 9.5. 関数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \|T\|$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の上のノルムを定め、このノルムにより $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ はバナッハ空間になる。

補題 9.6. 有界作用素 T に対して、有界作用素 T^* を関係

$$(T^*\xi|\eta) = (\xi|T\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

により定めることが、できる。これを T の**随伴作用素** *(adjoint operator)* という。

Proof. まず、Riesz の補題を復習。与えられた $\xi \in \mathcal{H}$ に対して、汎関数

$$\mathcal{H} \ni \eta \mapsto (\xi|T\eta)$$

は有界であるので、リースの補題により、$\xi' \in \mathcal{H}$ で、

$$(\xi|T\eta) = (\xi'|\eta)$$

となるものが存在する。対応 $\xi \mapsto \xi'$ は線型なので、作用素 T^* を定める。 □

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が有限次元のときには、正規直交基底 $\{e_j\}$ を用意すれば、$\mathcal{H}$ のベクトル ξ に対して、その成分表示

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が得られ、さらに線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ に対しても、

$$Te_j=\sum_{i=1}^n t_{ij}e_i,\quad (Te_1,\dots,Te_n)=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{n1} & & t_{nn}\end{pmatrix}$$

によって行列表示を得る。これらを $[\xi]$, $[T]$ で表せば、

$$(\xi|T\eta)=[\xi]^*[T][\eta]$$

となるので、通常の行列の場合の式に帰着する。すなわち、$[T^*]=[T]^*$.

命題 9.7 (随伴作用素の性質). 有界作用素 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、$T\mapsto T^*$ は星構造を定める。$(ST)^*=T^*S^*$, $(T^*)^*=T$ など。

定義 9.8. エルミート作用素、等距離作用素、ユニタリー作用素、射影作用素、正規作用素。

例題 9.9. ヒルベルト空間 ℓ^2 で、**移動作用素** (shift operator) を

$$(S\xi)_n=\begin{cases}\xi_{n-1} & \text{if } n\geq 1,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義すれば、S は等距離作用素ではあるがユニタリーではない。

問 28. 対角行列 $A=\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ が、

(i) エルミート行列 $\Leftrightarrow a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$.

(ii) ユニタリー行列 $\Leftrightarrow |a_1|=\dots=|a_n|=1$.

命題 9.10 (有界作用素のノルムの性質).

(i) $\|T^*\|=\|T\|$.

(ii) $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

(iii) $\|ST\|\leq\|S\|\,\|T\|$.

(iv) ユニタリー作用素 U に対して、$\|UTU^*\|=\|T\|$.

例題 9.11. 対角行列 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ については、

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}.$$

これと、ノルムのユニタリー不変性を使うと、エルミート行列 A に対して（もっと一般に正規行列に対して）、

$$\|A\| = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ は } A \text{ の固有値}\}.$$

さらに、上の命題の (iii) を使えば、一般の行列 A のノルムは、A^*A の最大固有値の平方根に一致することもわかる。

例題 9.12. 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

のノルムは、

$$A^*A = \begin{pmatrix} |a|^2 & \overline{a}b \\ a\overline{b} & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$$

の固有値を計算して、

$$\|A\|^2 = |a|^2 + |b|\frac{|b| + \sqrt{4|a|^2 + |b|^2}}{2}.$$

10　作用素のスペクトル

　まず、絶対収束級数についての復習。複素数の集まり $\{c_j\}_{j \in J}$ が総和可能 (summable) であるとは、

$$\sum_{j \in J} |c_j| < \infty$$

となること。これは、正確には、

$$\left\{ \sum_{j \in F} |c_j|; F \text{ は } J \text{ の有限部分集合} \right\}$$

が有界であるということ。このとき、$c_j \neq 0$ となる $j \in J$ の個数は高々可算であり、

$$\sum_{j\in J} c_j$$

は、和を計算する順序によらず、不等式

$$\left|\sum_{j\in J} c_j\right| \leq \sum_{j\in J} |c_j|$$

をみたす。

同様のことは、有界作用素の集まり $\{A_j\}_{j\in J}$ についても成り立つ。すなわち、$\sum_{j\in J} \|A_j\| < +\infty$ であれば、

$$\sum_{j\in J} A_j$$

は、和を計算する順序によらず、さらに不等式

$$\left\|\sum_{j\in J} A_j\right\| \leq \sum_{j\in J} \|A_j\|$$

をみたす。

作用素値関数 $A(t)$, $a \leq t \leq b$ が連続であるとき、その積分 $\int_a^b A(t)dt$ をリーマン和

$$\sum_{j=1}^{n} A(t_j)(t_j - t_{j-1})$$

の極限として定義することができ、

$$\left|\int_a^b A(t)dt\right| \leq \int_a^b \|A(t)\|dt$$

が成り立つ。

複素平面内の領域（連結開集合）D で定義された有界作用素値関数 $A(z)$ が**解析的** (analytic) であるとは、各 $z_0 \in D$ に対して、z_0 を中心とする開円板 $|z - z_0| < r$ で D に含まれるものが存在して、そこで、

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} A_n(z - z_0)^n$$

という冪級数表示が可能であること。ここで、$\{A_n\}$ は有界作用素の列で

$$\sum_{n\geq 0} \|A_n\| |z - z_0|^n < +\infty, \qquad |z - z_0| < r$$

を満たし、R と z_0 に依存して決まる。

作用素値解析関数についても Cauchy の積分定理

$$\oint_C A(z) dz = 0$$

が成り立ち、逆に連続関数 $A(z)$ で Cauchy の積分定理が成り立つものは解析的であり、上の冪級数表示は、$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subset D$ となる**全ての** $r > 0$ に対して有効である。とくに、z_0 と D の境界との距離を d とすれば、

$$\sum_{n\geq 0} r^n \|A_n\| < +\infty, \quad 0 \leq r < d$$

である。

問 29. （複素解析の本を参考にして）以上のことを確認する。

有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**可逆** (invertible) であるとは、$AB = BA = I$ となる有界作用素 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在すること。このとき、B は A のみで決まり、$B = A^{-1}$ と書き表される。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界可逆作用素全体を $GL(\mathcal{H})$ であらわすと、これは群になる。

定義 10.1. 有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、集合

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \notin GL(\mathcal{H})\}$$

を A の**スペクトル** (spectrum) と呼ぶ。固有値はスペクトルの一部であるが逆は一般に正しくない。

例題 10.2.

(i) 正方行列 A に対しては、$\sigma(A)$ は A の固有値全体の集合に他ならない。

(ii) ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ の上の有界作用素 A を

$$(A\xi)_n = \frac{1}{n}\xi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定めると、

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n = 1, 2, \dots\}$$

であり $1/n$ $(n \geq 1)$ は A の固有値であるが、0 はそうならない。

(iii) ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ の上の有界作用素 A を

$$(A\xi)(t) = t\xi(t)$$

で定めると、$\sigma(A) = [0, 1]$ であるが、どれも固有値ではない。

問 30. 連続関数 $a(t)$ による掛け算作用素のスペクトル。

命題 10.3. *(i)* $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

(ii) $A \in GL(\mathcal{H})$ のとき、$\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}$.

補題 10.4. 有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $\|A\| < 1$ をみたすならば、$I - A \in GL(\mathcal{H})$ であり、

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots.$$

命題 10.5. 有界作用素 A のスペクトル $\sigma(A)$ は、空でない有界閉集合である。さらに、作用素関数 $(zI - A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は、$z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ の解析関数である。

Proof. スペクトルの補集合 $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ が開集合であることをまず示そう。$\lambda \in \rho(A)$ とすると、$B = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ である。そこで、$\mu \in \mathbb{C}$ が λ に近いとき、$\mu I - A \in GL(\mathcal{H})$ であることを示す。$z = \mu - \lambda$ とおくと、

$$\mu I - A = \lambda I - A + zI = (\lambda I - A)(I + zB) = (I + zB)(\lambda I - A)$$

であるから、上の補題により、$\|zB\| = |z|\|B\| < 1$、すなわち、$|z| < \|B\|^{-1}$ であるとき、これらは可逆になる。したがって、$\rho(A)$ は開集合。

さらに、

$$(\mu I - A)^{-1} = B(I + zB)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-z)^n B^{n+1}$$

は、 z の収束冪級数であるから $(\lambda I - A)^{-1}$ は $\lambda \in \rho(A)$ の解析関数。

補題はまた、$|\lambda| > \|A\|$ のとき

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$$

を意味するので、$\sigma(A)$ は有界閉集合。

そこで、もし $\sigma(A)$ が空集合であれば、

$$2\pi i I = \sum_{n\geq 0} \int_{|\lambda|=r} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} A^n = \int_{|\lambda|=r} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

は Cauchy の積分定理により 0 となって矛盾。 □

定義 10.6. 有界作用素 A に対して、

$$r(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$$

を A の**スペクトル半径** (spectral radius) という。

さて、$|\lambda| > \|A\|$ に対して、

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

であり左辺は、$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ の解析関数であった。

この右辺の作用素値級数は、

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} < +\infty$$

であれば総和可能で、意味をもち、さらに

$$(\lambda I - A)\left(\sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} A^n\right) = \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n} A^n - \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} A^{n+1}$$

も総和可能であるから、和の順序を変えて計算すると、恒等変換 I に一致する。このことから、$\lambda I - A$ は逆をもつことになり、$\lambda \notin \sigma(A)$ がわかる。

まとめると、$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ が、不等式

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} < +\infty$$

をみたせば、$\lambda \notin \sigma(A)$ である。対偶を取れば、$\lambda \in \sigma(A)$ に対して、

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} = +\infty$$

である。そこで、この級数の収束半径が問題になる。

補題 10.7. 有界作用素 A について、数列 $\{\|A^n\|^{1/n}\}_{n\geq 1}$ は収束し、その極限値は $\inf\{\|A^n\|^{1/n}; n \geq 1\}$ に一致する。

Proof. $a_n = \log \|A^n\|$ とおくと、$a_{m+n} \leq a_m + a_n$ である。これから、任意の m と $n \geq m$ に対して、$n = mq + r$ と表せば、

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_m + a_r}{mq + r}$$

となって、$n \to \infty$ すなわち $q \to \infty$ の状況を考えると、

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$$

がわかる。$m \geq 1$ は任意であったから、これから

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m\geq 1} \frac{a_m}{m}$$

となり、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

であることがわかる。 □

これと上のまとめを合わせると、$\lambda \in \sigma(A)$ に対して、$|\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ となり、

$$r(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

がわかる。逆の不等式を考えるために、まず $r > \|A\|$ に対して、

$$\int_{|\lambda|=r} \lambda^n(\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \sum_{k\geq 0} \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda^n}{\lambda^{k+1}} d\lambda A^k = 2\pi i A^n.$$

左辺の積分に、Cauchy の積分定理を使えば、上の関係式は $r > r(A)$ でも正しい。とくに、

$$\|A^n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} \|\lambda^n(\lambda I - A)^{-1}\| |d\lambda| \leq M(r) r^{n+1},$$
$$M(r) = \max\{\|(\lambda I - A)^{-1}\|; |\lambda| = r\}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq r$$

となって、$r > r(A)$ を $r(A)$ に近づけると、逆の不等式も得られる。
　以上をまとめて、

定理 10.8. 有界作用素 A に対して、

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

である。

系 10.9. 正規作用素 A に対して、

$$\|A\| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proof. 正規作用素 B に対して、

$$\|B^2\| = \|(B^2)^* B^2\|^{1/2} = \|(B^* B)^*(B^* B)\|^{1/2} = \|B^* B\| = \|B\|^2.$$

正規作用素 A においては、A^n $(n = 2, 3, \dots)$ も正規作用素であるので、B のところに、A, A^2, A^4, A^8 を順次代入していけば、

$$\|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$$

が得られるので、

$$r(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^{2^m}\|^{2^{-m}} = \|A\|.$$

□

例題 10.10. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は 1 だけであるので、$\sigma(A) = \{1\}$ であるが、$a \neq 0$ のとき、$\|A\| > 1$.

多項式 $f(t) = f_0 + f_1 t + \cdots + f_n t^n$ $(f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C})$ に有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を代入した作用素

$$f_0 I + f_1 A + \cdots + f_n A^n$$

を $f(A)$ で表す。

補題 10.11. 交換可能な有界作用素の積 $AB = BA$ について、$AB \in GL(\mathcal{H})$ となる必要十分条件は、A, B ともに $GL(\mathcal{H})$ に属することである。

Proof. 有界作用素 $AB = BA$ に対する逆作用素 C の存在を仮定すると、

$$ABC = I = CAB = CBA$$

となって、A は右逆元 BC および左逆元 CB をもつから $A \in GL(\mathcal{H})$ であり、B についても同様。 □

Remark . 交換できない A, B については、上の主張は正しくない。実際、等距離作用素 V は、$V^*V = I$ が可逆であるが、V そのものは一般に逆をもたない。

命題 10.12.

(i) ユニタリー作用素 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}.$$

(ii) エルミート作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について、

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

Proof. (i) $\lambda \in \sigma(U)$ とすると、$|\lambda| \leq \|U\| = 1$. また、$\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1})$ でもある。実際、$\lambda^{-1} \notin \sigma(U^{-1})$ であるとすると、

$$\lambda^{-1}I - U^{-1} = \lambda^{-1}(U - \lambda I)U^{-1}$$

は、可逆で、したがって、$U - \lambda I \in GL(\mathcal{H})$ となって、$\lambda \notin \sigma(U)$ である。そこで、$|\lambda^{-1}| \leq \|U^*\| = 1$ となって、$|\lambda| = 1$ である。

(ii) A のかわりに、$A/2\|A\|$ を考えて、$\|A\| < 1$ としてよい。このとき、$A \pm iI \in GL(\mathcal{H})$ となり、

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1} = (A + iI)^{-1}(A - iI)$$

はユニタリーである。さらに、複素数 λ に対して、

$$\begin{aligned}(A - iI)(A + iI)^{-1} - \lambda I &= ((A - iI) - \lambda(A + iI))(A + iI)^{-1}\\ &= ((1 - \lambda)A - i(1 + \lambda)I)(A + iI)^{-1}\end{aligned}$$

であるから、$\lambda \in \sigma(U)$ という条件は

$$i\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \in \sigma(A)$$

と同値になる。(i) の結果から、$\lambda \in \sigma(U)$ は、$\lambda = e^{2i\theta}$ と書けるので、A のスペクトルは、

$$i\frac{1 + e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = i\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となって、実数である。 □

補題 10.13. 有界作用素 A の多項式 $f(A)$ のスペクトル集合は

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$$

で与えられる。

Proof. 複素数 λ に対して多項式 $f(t) - \lambda$ を

$$f(t) - \lambda = c(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

と因数分解すれば、作用素の等式

$$f(A) - \lambda I = c(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I)$$

が成り立つ。各 $A - \lambda_i I$ は互いに交換可能であるので、左辺が逆をたないことと、どれか一つの i について $A - \lambda_i I$ が逆をもたないことが同値になり、これすなわち、$\lambda = f(\lambda_i) \in \sigma(f(A))$ ということである。 □

系 10.14. 不定元 z の *Laurent* 多項式（すなわち、z と z^{-1} の多項式）$f(z)$ に対して、z にユニタリー作用素 U を代入した作用素を $f(U)$ で表すとき、$f(U)$ のスペクトル集合は、

$$\sigma(f(U)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(U)\}$$

で与えられる。

Proof. 自然数 n を十分大きく取って、$f(z) = z^{-n}g(z)$, $g(z)$ は z の多項式、と表す。さらに、与えられた複素数 μ に対して、

$$g(z) - \mu z^n = c\prod_i (z - \lambda_i)$$

と因数分解すると、

$$f(U) - \mu I = cU^{-n}\prod_i (U - \lambda_i)$$

である。

そこで、$f(U) - \mu I$ が逆を持つとすると、先の補題により、全ての i に対して $\lambda_i \notin \sigma(U)$ であり、もしさらに $\mu = f(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(U)$ であれば、

$$g(\lambda) - \mu\lambda^n = \lambda^{-n}(f(\lambda) - \mu) = 0$$

となって、$\lambda = \lambda_i$ for some i, となって矛盾である。

逆に、$\mu \notin f(\sigma(U))$ とすると、全ての i について、$\lambda_i \notin \sigma(U)$ でなければならず、$f(U) - \mu I$ は逆をもつ。 □

t を不定元とする多項式全体を $\mathbb{C}[t]$ で表すと、$\mathbb{C}[t]$ は* 代数になる：

$$f^*(t) = \overline{f_0} + \overline{f_1}t + \cdots + \overline{f_n}t^n.$$

また、z を不定元とする Laurent 多項式全体 $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ は、

$$z^* = z^{-1}$$

であるような*代数になっている。

補題 10.15.

(i) エルミート作用素 A に対して、対応

$$\mathbb{C}[t] \ni f \mapsto f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

は、* 準同型を定め、さらに

$$\|f(A)\| = \max\{|f(\lambda)|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

(ii) ユニタリー作用素 U に対して、対応

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \ni f \mapsto f(U) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

は *準同型を定め、さらに

$$\|f(U)\| = \max\{|f(\lambda)|; \lambda \in \sigma(U)\}.$$

Proof. 多項式 $f(t)$ に対して、$B = f(A)$ は正規作用素になるので、$\sigma(B) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$ と系？を併せると、公式が得られる。 □

定理 10.16. エルミート作用素 A に対して、次の性質をもつ写像 $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在しかつ一意的である。

(i) Φ は 単位的 $*$ 準同型である。

(ii) $\Phi(t) = A$.

(iii) $\|\Phi(f)\| = \|f\|$.

Proof. Weierstrass の多項式近似定理と、多項式の上での等距離性による。 □

関数 f が多項式のとき、$\Phi(f) = f(A)$ であるので、$f \in C(\sigma(A))$ に対しても同じ書き方をする。

定理 10.17 (Spectral Mapping Theorem). エルミート作用素 A と $\sigma(A)$ 上の連続関数 f に対して、

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proof. 複素数 $\mu \notin f(\sigma(A))$ に対して、t の関数 $(\mu - f(t))^{-1}$ を考えると、これは $\sigma(A)$ 上の連続関数 g を定め、

$$g(t)(\mu - f(t)) = 1 \quad \text{for } t \in \sigma(A),$$

を満たすので、

$$g(A)(\mu I - f(A)) = I$$

となって $\mu I - f(A)$ は可逆である。すなわち、$\mu \notin \sigma(f(A))$.

次に、$\mu = f(\lambda), \lambda \in \sigma(A)$ とする。いま、閉区間 $[\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]$ に集中した連続関数 g_n で $\|g_n\| = 1$ となるものを用意して、$\sigma(A)$ 上の連続関数 $h_n(t) = (f(\lambda) - f(t))g_n(t)$ を考えると、

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n\| = 0$$

となる。一方、$\|g_n\| = 1$ であるから、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトル ξ_n で、$\|\xi_n\| \leq 1, \|g_n(A)\xi_n\| \geq 1/2$ となるものが存在する。そこで、$\eta_n = g_n(A)\xi_n$ とおくと、

$$(\mu I - f(A))\eta_n = h_n(A)\xi_n \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

であるが、$\|\eta_n\| \geq 1/2$ であるので、作用素 $\mu I - f(A)$ は可逆ではありえない。すなわち $\mu \in \sigma(f(A))$.

以上をあわせて、$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ を得る。 □

ここで、射影作用素の性質をいくつか。まず、射影作用素と閉部分空間との関係。直交補空間、大小関係。直交関係。

定義 10.18. ヒルベルト空間の上で定義された射影作用素の族 $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で、

(i) (単調性) $s \leq t \Longrightarrow E_s \leq E_t$、

(ii) (右連続性)

$$\lim_{t\to s+0} E_t\xi = E_s\xi,$$

(iii) (完全性)

$$\lim_{t\to-\infty} E_t\xi = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} E_t\xi = \xi$$

となるものを**単位の分解** (resolution of identity) と呼ぶ。

問 31. 右連続性の条件は、

$$\lim_{t\to s+0}(\xi|E_t\xi) = (\xi|E_s\xi)$$

と同値である。

実数 t_0 で、t_0 の近くで E_t が変化しないもの、すなわち、$\exists\delta > 0$, $E_t = E_{t_0}$ $(|t-t_0| < \delta)$、となるものを「無駄な点」と呼ぶことにすれば、無駄な点全体は $\mathbb{R}$ の開集合になり、したがってその補集合 S は $\mathbb{R}$ の閉集合である。集合 S を単位の分解 $\{E_t\}$ の**台** (support) と呼ぶ。単位の分解が**有界**であるとは、その台が有界集合であること。すなわち、実数 $a < b$ で、

$$E_t = \begin{cases} I & \text{if } t \geq b, \\ 0 & \text{if } t < a \end{cases}$$

となるものが存在すること。（このとき台は $[a, b]$ に含まれる。）

例題 10.19. 有限次元の場合。$s \in S$ とすると、$E_{s-\epsilon} \subset E_{s+\epsilon}$ であるから、$\dim E_{s-\epsilon}\mathcal{H} < \dim E_{s+\epsilon}\mathcal{H}$ となって $t = s$ の前後で $E_t\mathcal{H}$ の次元が増加する。そこで、$\dim\mathcal{H}$ のときは、このような点は高々 $\dim\mathcal{H}$ 個しかない。$S = \{s_1 < \cdots < s_k\}$ とおくと、

$$E_t = \begin{cases} 0 & \text{if } t < s_1, \\ E_1 & \text{if } s_1 \leq t < s_2, \\ \vdots & \\ E_{k-1} & \text{if } s_{k-1} \leq t < s_k, \\ I & \text{if } t \geq s_k, \end{cases}$$

となって、

$$\{0\} \subset E_1\mathcal{H} \subset \cdots \subset E_{k-1}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$$

が単位の分解を与える。

命題 10.20. 単位の分解 $\{E_t\}$ があると、任意のベクトル $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して、$(\xi|E_t\eta)$ は $t \in \mathbb{R}$ の有界変動であり、$\{E_t\}$ の台 S 上の有界連続関数 $f(t)$ に対して、

$$(\xi|A\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d(\xi|E_t\eta)$$

により、有界正規作用素 A を定義することができる。

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dE_t$$

と書き表す。（作用素のスティルチェス積分）

Proof. 有界変動性は、

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(\xi|E_{t_j}\eta) - (\xi|E_{t_{j-1}}\eta)| &\leq \sum_{j=1}^{n} \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\xi\| \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\eta\| \\
&\leq \sqrt{\sum_j \|(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\xi\|^2 \sum_k \|(E_{t_k} - E_{t_{k-1}})\eta\|^2} \\
&= \|\xi\| \, \|\eta\|
\end{aligned}$$

からわかる。この不等式はまた、$V((\xi|E.\eta)) \leq \|\xi\| \, \|\eta\|$ を意味し、したがって、$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ の関数

$$B(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d(\xi|E_t\eta)$$

は、$|B(\xi, \eta)| \leq \|f\| \|\xi\| \, \|\eta\|$ をみたし、Riesz の補題により、有界作用素 A が定義される。 □

定理 10.21 (スペクトル分解定理).

(i) エルミート作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、有界な台 S をもつ単位の分解 $\{E_t\}$ で、

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} tdE_t$$

となるものが、一意的に存在する。

さらに、このとき $\sigma(A) = S$ であり、$f \in C(\sigma(A))$ に対して

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dE_t$$

が成り立つ。

(ii) ユニタリー作用素 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、閉区間 $[0, 2\pi]$ 内に台 S をもつ単位の分解 $\{E_t\}$ で、

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} dE_t$$

となるものが、一意的に存在する。

さらに、このとき $\sigma(U) = \{e^{it}; t \in S\}$ であり、$f \in C(\sigma(U))$ に対して

$$f(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{it}) dE_t$$

が成り立つ。

Proof. エルミート作用素、ユニタリー作用素ともに証明は並行に進めることができるので、エルミート作用素のみについて記述する。

与えられた $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して、$C(\sigma(A))$ 上の汎関数 $\varphi_{\xi,\eta}$ を

$$\varphi_{\xi,\eta}(f) = (\xi | f(A)\eta), \qquad f \in C(\sigma(A))$$

で定めると、

$$\|\varphi_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\| \, \|\eta\|$$

であるので、Riesz-Markov-Kakutani の定理により、（複素数値）有界変動右連続関数 $h_{\xi,\eta}(t)$ で、$h_{\xi,\eta}(-\infty) = 0$ かつ

$$\varphi_{\xi,\eta}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dh_{\xi,\eta}(t)$$

となるものが一意的に存在する。一意性により、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して、$(\xi, \eta) \mapsto h_{\xi,\eta}(t)$ は線型であり、そのノルムは 1 以下に押さえられる。

したがって、

$$(\xi | E(t)\eta) = h_{\xi,\eta}(t), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

により有界作用素 $E(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を定めることができる。補題 8.2 により、実連続関数の列 $f_n(s)$ で、$0 \leq f_n \leq 1$ かつ

$$\lim_{n \to \infty} f_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \leq t + 1/n, \\ 0 & \text{if } s \geq t + 2/n \end{cases}$$

であるものについてはいつでも

$$h_{\xi,\eta}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\xi,\eta}(f_n)$$

であるので、

$$(\xi|E(t)\eta) = \lim_{n\to\infty} (\xi|f_n(A)\eta)$$

が成り立つ。

　そこで、

$$(\xi|f_n^2(A)\eta) = (\xi|f_n(A)f_n(A)\eta) = \sum_k (\xi|f_n(A)e_k)(e_k|f_n(A)\eta)$$

の極限 $n \to \infty$ をとって、

$$(\xi|E(t)\eta) = \sum_k (\xi|E(t)e_k)(e_k|E(t)\eta) = (\xi|E(t)E(t)\eta)$$

となるので、$E(t)$ は射影作用素である。 □

問 32. 上の証明で、$E(t)^2 = E(t)$ の部分を詳しく述べよ。ヒント：$\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n$,

$$\sum_{k\geq N} |(\xi|f_n(A)e_k)(e_k|f_n(A)\eta)| \leq \epsilon.$$

例題 10.22. 実数値連続関数 $f(t)$ に対して、$L^2(a,b)$ 上のエルミート作用素 A を

$$(A\xi)(t) = f(t)\xi(t)$$

で定めると、$E(t)$ は、(a,b) の部分集合 $\{s; f(s) \leq t\}$ の特性関数 χ による掛け算作用素

$$(E(t)\xi)(s) = \chi(s)\xi(s)$$

で与えられる。

問 33. 上の事実を確かめる。

参考文献

[1] 日合・柳「ヒルベルト空間と線型作用素」（牧野書店）.

[2] 溝畑「ルベーグ積分」（岩波書店）.

[3] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, MacGraw-Hill, 1991.

[5] 吉田耕作「近代解析」（共立出版）.