

1 二面体群 D_4 の正規部分群をすべて求めよ。

角度 $2\pi/4 = \pi/2$ の回転を r , 実軸に関する折り返しを s と表すことにすると ,

$$D_4 = \langle r, s \rangle = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$$

とおける .

$$srs = r^{-1}, r^4 = 1, s^2 = 1$$

であることに注意して D_4 の共役類を求めると、

$$D_4 = \{e\} \sqcup \{r, r^3\} \sqcup \{r^2\} \sqcup \{s, r^2s\} \sqcup \{rs, r^3s\}$$

となる。正規部分群は、共役類の合併で表される部分群であることから、自明でない ($\{e\}$ 、 D_4 以外の) 正規部分群は、

$$\{e, r^2\}, \quad \{e, r, r^2, r^3\}, \quad \{e, r^2, s, r^2s\}, \quad \{e, r^2, rs, r^3s\}$$

の 4 つである。

2 S_3 の共役類をすべて求めよ。

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

である。 S_3 の共役類は、置換の型で決まることに注意すれば、

$$C(e) = \{e\},$$

$$C(12) = C(13) = C(23) = \{(12), (13), (23)\},$$

$$C(123) = C(132) = \{(132), (123)\}$$

である。ちなみに共役類分割は

$$S_3 = C(e) \sqcup C(12) \sqcup C(123)$$

となる。