GRP2009-12-15

$\boxed{1}$ $\sigma \in S_4$ から生成された巡回群 $\langle\sigma\rangle$ の $\{1,2,3,4\}$ への作用による軌道が丁度3つになる場合があるかどうか調べよ。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$$

をとると，$\sigma^2 = e$ より，

$$\langle\sigma\rangle = \{e, \sigma\}$$

である．この作用による $x \in \{1,2,3,4\}$ に対する軌道を $Orb(x)$ とすると，

$$Orb(1) = \{1\}, Orb(2) = \{2\}, Orb(3) = \{3,4\}, Orb(4) = \{3,4\}(= Orb(3))$$

となる．従って，軌道が丁度3つになる場合は存在する．また，この軌道で $\{1,2,3,4\}$ を軌道分解すると

$$\{1,2,3,4\} = Orb(1) \sqcup Orb(2) \sqcup Orb(3) = \{1\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3,4\}$$

である．

$\boxed{2}$ S_3 のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への自然な作用を考えるとき、$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ が自由点であるための必要十分条件は、$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ であることを示せ。

まず，“ (x,y,z) が自由点であるならば $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ ”を示す．

対偶を示す．$(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ と仮定する．この仮定より，x,y,z の少なくとも2つは一致する．そこで，$x = y$ と仮定する．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$$

を (x,y,z) に作用させると，

$$\sigma(x,y,z) = (y,x,z) = (x,y,z)$$

である（$x = y$ より）．$\sigma \neq e$ であるので，(x,y,z) は自由点ではない．

次に，“ $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ ならば (x,y,z) が自由点である ”を示す．

$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ より，x,y,z は互いに異なる．従って，S_3 の元を作用させたとき，変わらないのは単位元を作用させた場合だけである．故に (x,y,z) は自由点である．