

1 3変数の多項式全体の集合を  $P$  とし、群  $G = S_3$  の  $P$  への作用を変数の入れ替えによって定める。このとき、 $f \in P$  で  $|G(f)| = 2$  となるもの、 $|G(f)| = 3$  となるものの例をそれぞれ一つ挙げよ。

$$f = x_1x_2$$

とおくと、

$$G(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

である。従って、 $|G(f)| = 2$ 。また、

$$f = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

とおくと、

$$G(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

である。従って、 $|G(f)| = 3$ 。

2  $SO(2)$  の  $\mathbb{R}^2$  への自然な作用を考えると、 $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$  を通る軌道を求めよ。

$SO(2)$  を  $\mathbb{R}^2$  に作用させるということは、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  を原点を中心にして回転させる、ということである。従って  $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$  を通る軌道は、原点を中心とした半径  $\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$  の円である。