

1 群  $\mathbb{Z}_{12}$  の生成元をすべて求めよ。

演習問題 5.2 より,  $[k] \in \mathbb{Z}_{12}$  ( $0 \leq k < 12$ ) が  $\mathbb{Z}_{12}$  の生成元であるための条件は,  $(k, 12) = 1$  である. このような  $k$  は 1, 5, 7, 11 の 4 個. 従って,  $\mathbb{Z}_{12}$  の生成元は  $[1], [5], [7], [11] (\in \mathbb{Z}_{12})$ .

2  $e^{5i\pi/3}$  の位数を求めよ。

自然数  $k \geq 1$  に対して、

$$(e^{5i\pi/3})^k = e^{5ki\pi/3} = 1 \iff \frac{5k}{6} \in \mathbb{Z}$$

であるから、このような  $k$  は、6 の倍数であり、したがって求める位数は 6 となる。

次のような誤答が多く見られたので注意しておく。

$$\frac{5k}{6} \in \mathbb{Z} \iff \frac{5k}{6} = n \quad (n \text{ は自然数})$$

すなわち、

$$k = \frac{6}{5}n \quad (n \text{ は自然数})$$

であるから、最小値である位数は、 $\frac{6}{5}$ 。

最後のところで、 $k$  が自然数であることが完全に忘れられてしまっている。 $n$  は自然数であれば何でも良いというものではなく、 $k$  が自然数であることを保証するもの、すなわち 5 の倍数、でなければならない。

等式と表面的な言葉使い(この場合は、最小値)をいじくり回すことで事足り、とした者は猛省すべきである。意味を忘れて形式のみを弄ぶことほど危険なことはない。