GRP2009-11-10

$\boxed{1}$ 群 C_9 と直積群 $C_3 \times C_3$ は、同型か否か。

同型写像 $\varphi : C_9 \to C_3 \times C_3$ が存在したと仮定する．$a \in C_9$ を，9 乗して初めて単位元 $e = 1$ になる元とし、$\varphi(a) = (x, y)$ $(x, y \in C_3)$ であるとすると，

$$\varphi(a)\varphi(a)\varphi(a) = \varphi(a^3).$$

また，

$$\varphi(a)\varphi(a)\varphi(a) = (x, y)(x, y)(x, y) = (x^3, y^3) = (1, 1) = \varphi(e).$$

$$\therefore \varphi(a^3) = \varphi(e).$$

φ は、単射であるから、

$$a^3 = e = 1.$$

これは，a を 9 乗して初めて単位元になるとした仮定に矛盾する．従って，C_9 と $C_3 \times C_3$ は同型ではない．

$\boxed{2}$ 可換群と同型な群は可換群であること、および S_3 と C_6 は同型でないことを示せ。

G を可換群，G' を一般の群，$G \cong G'$ と仮定する．

$$\varphi : G \ni a \mapsto \varphi(a) \in G'$$

を同型写像（全射準同型でよい）とする．勝手な $a', b' \in G'$ に対して、$a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ となるような $a, b \in G$ が存在する。G は可換群であるから，$ab = ba$. よって、φ が準同型写像であることに注意すれば，

$$a'b' = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = b'a'.$$

故に G' は可換群である．

C_6 は可換群であるので C_6 と同型な群は可換でなければならないが，S_3 は非可換群である．従って，S_3 と C_6 は同型ではない．