GRP2009-10-20

$\boxed{1}$ 直線 $y = x\tan\theta$ に関する対称移動を表す行列 T_θ を求めよ。

平面上の任意の点を $P(x, y)$，P を対称移動した点を $P'(X, Y)$ とおく．$y = x\tan\theta$ の傾きは $\tan\theta$．直線 PP' の傾きは $\frac{Y-y}{X-x}$ であるから，

$$\tan\theta \cdot \frac{Y-y}{X-x} = -1.$$

$$\therefore X - x + \tan\theta(Y - y) = 0. \tag{1}$$

直線 PP' の中点の座標は

$$\left(\frac{X+x}{2}, \frac{Y+y}{2}\right)$$

で，この点は $y = x\tan\theta$ 上にある．

$$\therefore \frac{Y+y}{2} = \tan\theta \cdot \frac{X+x}{2}.$$

$$\therefore Y + y = \tan\theta \cdot (X + x). \tag{2}$$

(1),(2) より，

$$\begin{cases} X + Y\tan\theta = x + y\tan\theta \\ X\tan\theta - Y = -x\tan\theta + y \end{cases}$$

である．この連立方程式を X, Y について解くと，

$$X = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot x + \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot y,$$
$$Y = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot x - \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot y.$$

従って，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2} & \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} & \frac{\tan^2\theta-1}{1+\tan^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2} & \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} & \frac{\tan^2\theta-1}{1+\tan^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 次は、異なる４つの要素 $\{a, b, c, d\}$ からなる群の乗積表の一部である。どれが単位元か考え、表の残りの部分を完成させる上で必要な推論を述べよ。

	a	b	c	d
a	b			c
b		b		
c			a	
d	c			

$b^2 = b$ より，両辺に b^{-1} をかけると，$b = 1$.

$ca = a$ または $ca = c$ と仮定すると，それぞれ $c = 1, a = 1$ となり，$b = 1$ に矛盾する．$ca = b$ と仮定すると $c = a^{-1}$ となり，$a^2 = b$ に矛盾する．従って $ca = d$．同様に $ac = d$.

$cd = c$ または $cd = d$ と仮定すると，それぞれ $d = 1, c = 1$ となり，$b = 1$ に矛盾する．$cd = a$ と仮定すると $c^2 = a$ より $c = d$ となり，矛盾．従って $cd = b$．同様に $dc = b$.

$d^2 = d$ と仮定すると $d = 1$ となり，$b = 1$ に矛盾．$d^2 = c$ と仮定すると，$ad = c$ より $a = d$ となり，矛盾．$d^2 = b$ と仮定すると，$cd = b$ より $c = d$ となり，矛盾．従って $d^2 = a$．表は次のようになる：

	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a