$\boxed{1}$ 長方形 $ABCD$ の対称性を与える頂点の入れ替えをすべて求めよ。

（正方形でない）長方形を自身に移す合同変換は、恒等変換、長方形の重心のまわりの角 π の回転、辺の垂直二等分線に関する折り返しであるから、

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

の 4 個。

$\boxed{2}$ Lagrange の定理を $(x-y)(y-z)$ について確かめよ。

つぎの 6 個の変数の入れ替え

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

を $f=(x-y)(y-z)$ に施したものを f_j $(1 \leq j \leq 6)$ とすると、

$$f_1 = (x-y)(y-z),\ f_2 = (x-z)(z-y),\ f_3 = (y-x)(x-z),$$

$$f_4 = (y-z)(z-x),\ f_5 = (z-x)(x-y),\ f_6 = (z-y)(y-x).$$

従って、異なった式は 3 個出てくる。

$$f_1 = f_6, \quad f_2 = f_4, \quad f_3 = f_5.$$

また、$G(f) = \{\sigma_1, \sigma_6\}$ であるから、

$$\frac{n!}{|G(f)|} = \frac{3!}{2} = 3.$$