GRP2009-1-19

$\boxed{1}$ 同型 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ を示せ。

写像 φ を，

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, a \mapsto [a]$$

と定めると，φ は全射準同型である．
（∵）$\forall[a] \in \mathbb{Z}_n$ に対して，$a \in \mathbb{Z}$ をとると，$\varphi(a) = [a]$ である．従って，φ は全射である．
$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ をとる．

$$\varphi(a+b) = [a+b] = [a] + [b] = \varphi(a) + \varphi(b).$$

従って，φ は準同型である．

また，$\ker\varphi = n\mathbb{Z}$ である．
（∵）$\forall x \in n\mathbb{Z}$ をとる．$x = nk$（$k \in \mathbb{Z}$）とおける．

$$\varphi(x) = [x] = [nk] = [0]$$

であるので，$\ker\varphi = n\mathbb{Z}$ である（加法群 $\mathbb{Z}_n$ の単位元は $[0]$）．

φ は全射であるので，$\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$．従って，準同型定理より，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ である．

$\boxed{2}$ 同型 $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ を示せ。

写像 φ を，

$$\varphi : S_n \to \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$$

と定めると，φ は全射準同型である．
（∵）$\forall m \in \{\pm 1\}$ に対して，$\mathrm{sgn}(\sigma) = m$ となる $\sigma \in S_n$ をとると，$\varphi(\sigma) = m$ である．従って，φ は全射である．
$\forall \sigma, \tau \in S_n$ をとる．

$$\varphi(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau).$$

従って，φ は準同型である．

また，$\ker\varphi = A_n$ である．
（∵）

$$A_n = \{\rho \in S_n ; \mathrm{sgn}(\rho) = 1\}$$

であるので，$\forall \rho \in A_n$ に対して $\varphi(\rho) = 1$ である．従って，$\ker\varphi = A_n$ である（乗法群 $\{\pm 1\}$ の単位元は 1）．

φ は全射であるので，$\varphi(S_n) = \{\pm 1\}$．従って，準同型定理より，$S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ である．