

群論演習問題 2008

1 対称性の起源

提出期限：2008/10/10

問 1. 自然数 m の十進数表示を $a_l \dots a_2 a_1$ とするとき、

$$m \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_l \pmod{9}.$$

したがって、例えば、

$$271828 \equiv 2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 = 28 \equiv 1 \pmod{9}.$$

11 を法とした剰余類について類似の計算方法を与えよ。

問 2 (**). 素数 p を考える。自然数 m, n について、

$$(m+n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}.$$

これから $m^p \equiv m \pmod{p}$ を導け。

問 3. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ を x, y, z の基本対称式で表わせ。

問 4. Lagrange の定理を、

(i) $n = 3$, $f = xy$, $f = (x-y)(y-z)(z-x)$ について確かめよ。

(ii) $f = x_2 + \dots + x_n$ について確かめよ。

問 5. $xy + z^2$ と $x^2y + y^2z + z^2x$ の対称性の程度を比較せよ。

問 6. $n = 4$ で、 $x_1 + x_2$ と $x_1 + x_2 + x_3^2$ はどちらの対称性が高いか。

問 7. 正方形の対称性、正五角形の対称性を与える頂点の入れ替えをすべて求めよ。

問 8 (**). 正四面体の対称性について記述せよ。

2 群とは

提出期限：2008/10/17

問 9. 群 G において、 $a, b \in G$ のとき $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ であることを示せ。証明の過程で群の公理がどのように使われているか明示せよ。

問 10. 群 G において、 $(g^{-1})^{-1} = g$ を確かめ、 $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ は全単射であることを示せ。

問 11. 4つの元 a, b, c, d があるとき、積 $abcd$ の計算方法を指示する括弧のつけ方で異なるものは何種類あるか。また、それぞれの計算結果は相互に等しいことを結合法則から導け。

問 12. 自然数 $n \geq 3$ に対して、 $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$ とする。集合 $\{i, j\}$ と $\{k, l\}$ の重なり具合で分けて、互換の積 $(i, j)(k, l)$ を計算せよ。

問 13 (**). $a_1 \dots a_n$ に対する勝手な括弧付の結果が、 $(\dots((a_1 a_2) a_3) \dots) a_n$ に一致することを n についての帰納法で説明せよ。

問 14. 条件 (i) $a, b \in H \implies ab \in H$, (ii) $a \in H \implies a^{-1} \in H$ は、

$$a, b \in H \implies ab^{-1} \in H$$

と同値である。

問 15. 合同変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

の逆変換を求めよ。

問 16 (**). S_4 の部分群で $\{(12)(34), (13)(24)\}$ を含むものをすべて求めよ。

問 17. 群 G の部分群 H, K に対して、 $H \cap K$ も部分群である。 $H \cup K$ が部分群とならない例を挙げよ。

問 18 (***). \mathbb{R}^2 の合同変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$(T \in O(2))$ の形であることを次の手順で示せ。

- (i) 上の変換を $\Phi_{T,a,b}$ とすれば、合同変換である。
- (ii) 任意の合同変換 Φ に対して、 T, a, b をうまく選べると合成変換 $\Phi_{T,a,b}\Phi$ が、

$$\Phi_{T,a,b}\Phi(O) = O, \quad \Phi_{T,a,b}\Phi(P) = P, \quad \Phi_{T,a,b}\Phi(Q) = Q$$

となるようにできる。ここで、 $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$ である。

- (iii) 合同変換 Φ で $\Phi(O) = O$, $\Phi(P) = P$, $\Phi(Q) = Q$ を満たすものは、恒等変換に限る。

3 群の相似

提出期限：2008/10/31

問 19. 準同型 $\varphi : G \rightarrow G'$ が単射であることと

$$\{g \in G; \varphi(g) = 1_{G'}\} = \{1_G\}$$

であることは同値である。

問 20. 群の準同型 $\varphi : G \rightarrow G'$ を考える。群 G が可換であれば、その像 $\varphi(G)$ は G' の可換な部分群である。(G' そのものは可換であるとは限らない。)

問 21. $\varphi : G \rightarrow G'$ が同型写像であるとき、 $\varphi^{-1} : G' \rightarrow G$ も同型写像である。

問 22. 同型 $SO(2) \cong \mathbb{T}$ を具体的に与えよ。

問 23. $m \neq n$ であるとき、 S_m と S_n は同型にならない。何故か。

問 24 (**). $D_3 \cong S_3$ である。(例 3.5 参照。)

問 25 (**). $\sigma \in S_n$ に対して n 次の直交行列 $T(\sigma)$ を、 $T(\sigma) : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ で定めると、 $T : S_n \rightarrow O(n)$ は単射準同型である。

問 26. 直積集合 $\mathbb{R}^2 \times O(2)$ に、積の演算を

$$(a, A) \cdot (b, B) = (a + Ab, AB)$$

で定めたものは、 \mathbb{R}^2 の合同変換群と同型である。(問 16 参照。)

問 27 (**). \mathbb{R} から \mathbb{R} への連続な準同型は $x \mapsto ax$ の形であることを示せ。

問 28. 問 27 を認めた上で、加法群 \mathbb{R} から乗法群 \mathbb{R}_+ への連続な準同型は指数関数によって与えられることを示せ。

4 巡回群

提出期限：2008/11/7

問 29. 二面体群は、隣り合った2つの折り返し s, rs によっても生成される。

問 30. 冪乗についての指数法則を確かめよ。

問 31. 位数 m の元 a と位数 n の元 b が、 $ab = ba$ をみたし、 m と n が互いに素であるならば、 ab の位数は、 mn である。

問 32. S_{m+n} の置換 $\sigma = (1, 2, \dots, m)(m+1, m+2, \dots, m+n)$ の位数を求めよ。

問 33 (**). 行列

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

の位数について調べよ。

問 34. m, n を自然数とする。 \mathbb{Z} の部分群 $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$ の共通部分を求めよ。

問 35 (**). $\mathbb{T} \cong SO(2)$ の有限部分群は全て C_n の形。

問 36 (***). $O(2)$ の有限部分群は、 C_n または D_n と同型。

問 37 (**). 直積群 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ が巡回群であるための必要十分条件は、 m と n が互いに素であることである。とくにこのとき、 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ である。

5 群作用

提出期限：2008/11/21

問 38. 例 5.4 の特殊な場合である S_m の写像空間 $Y^{\{1, \dots, m\}}$ への作用を具体的に表示してみよ。

問 39. 有限群 G の要素を $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ と並べておく。このとき、任意の $g \in G$ に対して、 $\{gg_1, gg_2, \dots, gg_n\}$ は、もとの g_1, \dots, g_n の並べ替えになっている。これを示せ。

問 40. 対称群 S_n の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への自然な作用を考えると、その軌道について調べよ。

問 41 (**). 対称群 S_n のべき集合 2^X ($X = \{1, 2, \dots, n\}$) への自然な作用を定義し、その軌道について調べよ。

問 42. $G(x)$ が実際に G の部分群であることを確認。

問 43. 作用 $G \times X \rightarrow X$ に対応する表現を $\pi: G \rightarrow S(X)$ で表わすとき、

$$\ker \pi = \bigcap_{x \in X} G(x).$$

問 44. $SO(3)$ の \mathbb{R}^3 への自然な作用で、 $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ における固定部分群は、 z 軸のまわりの回転全体である。

問 45 (**). $G = SO(3)$ の \mathbb{R}^3 への自然な作用を考える。与えられた単位ベクトル $u \in \mathbb{R}^3$ に対して、 u を含む正規直交基底 $\{u, v, w\}$ を取るとき、 $G(u)$ の元を $\{u, v, w\}$ に関して表示した場合の形決定せよ。

6 軌道空間

提出期限：2008/12/12

問 46. $O(n)$ の \mathbb{R}^n への自然な作用による軌道は、球面

$$\{(x_1, \dots, x_n); (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = r^2\}$$

であり、軌道の代表系として $\{(0, \dots, 0, r); r \geq 0\}$ を取ることができる。

問 47. $\sigma \in S_5$ から生成された巡回群 $\langle \sigma \rangle$ の $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ への作用による軌道が丁度 2 つになるような σ の個数を求めよ。

問 48. S_n の $\{1, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) への自然な作用は、不動点も自由点ももたない。

問 49. S_m の写像空間 (= 列空間) $X^{\{1, \dots, m\}}$ への自然な作用を考えると、 $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow X$ が自由点であるための条件を写像 f の性質として述べよ。

問 50 (**). 与えられた実数 θ に対して、 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ の同相写像 R を $R(z) = e^{i\theta}z$ で定める。加法群 \mathbb{Z} の \mathbb{T} への作用を、 $\mathbb{Z} \ni n \mapsto R^n$ とするとき、軌道空間の様子が、 θ が有理数か否かでどのように変わるか調べよ。

問 51 (**). 座標平面で、直線

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}(x - 1)$$

に関する折り返し写像 3 つから生成される合同変換群を G とするとき、 G の \mathbb{R}^2 への作用の基本領域を (一つ) 求めよ。

7 剰余類空間

提出期限：2008/12/19

問 52. $a, b \in G$ に対して、 $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$ 、を示せ。

問 53 (**). 二面体群 D_n の部分群 $\langle s \rangle$ に関する左右の剰余類を求めよ。

問 54. $G = S_n$, $H = \langle (1, 2, \dots, n) \rangle$ とおくと、 G/H と $H \backslash G$ を記述し、それぞれの代表系を 1 つ与えよ。

問 55. 有限群 G の大きさ $|G|$ が素数であれば、 G は巡回群に同型である。

問 56. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ に対して、Lagrange 対応を具体的に与えよ。

問 57 (***) . 有限群 G の大きさ $|G|$ が素数 p で割り切れるならば、 G は位数 p の元を含む。

\mathbb{Z}_p の集合 $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^n; g_1 \dots g_p = 1\}$ への巡回作用を考え、軌道の大きさを調べる。

8 共役類

提出期限：2008/1/16

問 58 (**). 二面体群 D_n の共役類について調べよ。

問 59. 部分群に対する性質として、不変性と正規性が同値であることを示せ。

問 60. 大きさが偶数の有限群 G の中に、大きさが $|G|/2$ の部分群が存在すれば、それは正規部分群である。

問 61.

(i) $gHg^{-1} \subset H$ がすべての $g \in H$ で成り立てば、 H は正規部分群。

(ii) H, K を正規部分群とすれば、 $H \cap K$ も正規部分群。

問 62. 同型 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$ を示せ。

問 63. 同型 $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2$ を示せ。

問 64 (**). 群 G の部分群 H および正規部分群 N に対して、

$$HN = \{hn; h \in H, n \in N\}$$

は G の部分群であること、 $H \cap N$ は H の正規部分群であることを確認し、さらに同型 $HN/N \cong H/H \cap N$ を示せ。

問 65 (***) . 正規部分群 N が $|G/N| = 2$ であるとき、 G の部分群 H に対して、

$$H/(H \cap N) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } H \not\subset N, \\ \{1\} & \text{if } H \subset N. \end{cases}$$

これを、 $G = S_n, N = A_n$ に適用することで、 S_n における $\sigma \in A_n$ の共役類 $C(\sigma)$ は、

(i) A_n の中でも一つの共役類であるか、(ii) A_n の共役類として同じ大きさの2つの部分に分かれるかのいずれかであることを示せ。

問 66 (****). 同型 $SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ を示せ。(リー群の本を見よ。)

9 対称群

提出期限：2008/1/23

問 67. 交代式は差積で割り切れ、割り切った商は対称式である。

問 68. 交代群で不変な多項式は、対称式と交代式の和で書ける。

問 69. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ を与えるあみだ籤を具体的に一つ作れ。

問 70. 交代群 A_n の要素の数 $|A_n|$ を求めよ。

問 71. 巡回置換 $(12\dots n)$ の偶奇性について調べよ。

問 72. 位数 n の巡回置換 $\sigma \in S_n$ に対して、その共役類 $C(\sigma)$ の大きさを求めよ。

問 73 (**). S_n ($n = 3, 4, 5$) について、共役類の可能な型とその大きさを求めよ。また、各型をヤング図式で表わしてみよ。さらにまた、各共役類の偶奇性についても調べよ。

問 74 (***) . 交代群 A_4, A_5 の共役類について調べよ。 A_4 の自明でない正規部分群は、一つしかなくその大きさは、4 である。また、 A_5 の正規部分群は自明なものに限ることを示せ。

問 75 (***) . S_n の元の位数の最大値を求めよ。

10 軌道数公式

提出期限：2008/1/30

問 76. 線対称・点対称を不動点集合 X^g と関連付けて説明してみよ。

問 77. 作用に対応した準同型を $\pi : G \rightarrow S(X)$ で表わすとき、

$$\ker \pi = \{g \in G; X^g = X\}$$

を示せ。

問 78 (**). 直交群 $O(2)$ のユークリッド空間 $X = \mathbb{R}^2$ への自然な作用を考える。直交行列 T に対して、

$$X^T = \begin{cases} \text{原点を通る直線} & \text{if } \det(T) = -1, \\ \text{全空間} & \text{if } T = I, \\ \text{原点} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 79 (**). 共役作用において、軌道数公式がどのような形になるか調べよ。

問 80. σ^l の位数 $o(l)$ は、 $m/(l, m)$ で与えられることに注意して、

$$|Z^{\sigma^l}| = n^{m/o(l)} = n^{(l, m)}$$

を導け。

問 81. $\sigma^l \tau$ ($l = 1, \dots, m-1$) で、正 m 角形の板を不変にする全ての折り返しが得られる。

問 82. 正 6 角形の指輪の 6 辺を 3 色で塗り分ける方法は何通りあるか。