から等式

$$|G| = |G/H||H|$$

を得る。 □

命題 4.20. 剰余類空間 G/H には、G が自然に左から作用し、点 $x = gH$ における安定部分群は $G(x) = gHg^{-1}$ で与えられる。とくに $x = H$ のときは、$G(x) = H$ である。

逆に、与えられた左作用 $G \times X \to X$ に対して、自然な双射

$$G/G(x) \to Gx$$

が存在し、G の左作用を保つ。

より一般に次のことが成り立つ。

命題 4.21. 双作用 $G \times X \times H \to X$ が与えられると、$G\backslash X$ は H の自然な右作用をもち、X/H は G の自然な左作用をもち、さらに自然な同一視

$$G\backslash(X/H) = G\backslash X/H = (G\backslash X)/H$$

が存在する。

定理 4.22. 有限群 G の有限集合 X への作用について、

$$|X| = \sum_{[x]\in G\backslash X} \frac{|G|}{|G(x)|}$$

が成り立つ。ここで、$[x]$ は $x \in X$ を通る軌道を表し、右辺の和は軌道空間の代表元について取る。

5 商群

オイラーの公式による $\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}$ への回転作用を考えよう。回転行列による 1 次変換を通じて、$\mathbb{R}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ に回転角をパラメータとして作用する。この作用においては、回転角の 2π だけの違いは効いてこず、作用を考える上で「無駄」な部分となっている。

一般に、作用の核 (kernel) とは、

$$N = \{g \in G; gx = x, \forall x \in X\} = \bigcap_{x\in X} G(x)$$

のこと。作用という観点からは「無駄な」部分を表す。N は G の部分群であるが、さらに $gNg^{-1} = N$ という著しい性質をみたす。

例 **5.1.** 部分群 $S_{n-1} \subset S_n$ は、この性質をもたない。

定義 **5.2.** 群 G の部分群 N が、$gNg^{-1} = N$ for all $g \in G$ という性質をもつとき、正規部分群 (normal subgroup) と呼ぶ。

正規部分群に対しては、$gN = Ng$ となるので、g の左剰余類と右剰余類は完全に一致する。この意味で、$N\backslash G = G/N$ となる。さらに、G/N における積を

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

で定義することができて、G/N は再び群になる。これを商群 (quotient group) とよぶ。定義がうまくいっている (well-defined)、ということ。

例 **5.3.**

(i) $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(ii) 商ベクトル空間。

群 G からもうひとつの群 H への写像 $\varphi : G \to H$ で $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ となるものを準同型写像 (homomorphism) という。

例 **5.4.** 群 G の集合 X への作用を考えることと、G から一般変換群 $GT(X)$ への準同型 $G \to GT(X)$ を考えることは、同等のことである。

homo も iso も「等しい、同一」という意味 (ラテン語とギリシャ語？) の言葉であるが、数学の用語としては、homo は「似ている」、iso は「同じ」というニュアンスで使い分けている。

問 **20.** 準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、$\varphi(1_G) = 1_H$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ である。

例 **5.5.**

(i) 指数関数は、$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像になっている。

(ii) 対称群 S_n の元 (置換) σ にその符号 $\epsilon(\sigma)$ を対応させる写像は、S_n から $\mathbb{Z}_2$ への準同型写像である。

(iii) 行列式は、$GL(n,\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像になっている。

(iv) ユークリッド変換群から直交群への準同型。

(v) 特殊線型群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から 1 次分数変換群への準同型。

(vi) 組み紐群 (braid group) B_n と準同型写像 $B_n \to S_n$.

与えられた準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、

$$N = \{g \in G; \varphi(g) = 1\}$$

は G の正規部分群である。これを φ の核 (kernel) という。また φ の像 (image)

$$\varphi(G) = \{\varphi(g); g \in G\}$$

は H の部分群となる。

問 **21.** 準同型の像が部分群になることを確かめよ。

準同型写像 φ が全単射であるとき、同型写像 (isomorphism) という。二つの群 G, H が同型である (isomorphic) とは、G から H への同型写像が存在すること定義する。同型な群は同一の構造 (対称性) を表している。

問 **22.** 準同型写像 $\varphi : G \to H$ が単射であるための必要十分条件は、核が自明、すなわち $N = \{1\}$ となることである。

定理 **5.6** (準同型定理)**.** 与えられた準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、

$$G/N \ni gN \mapsto \varphi(g) \in \varphi(G)$$

は商群 G/N から $\varphi(G)$ への同型写像を与える。

上の定理で、とくに準同型が全射であるときには、H は G の商群とみることができ、また準同型が単射であるときには、G を H の部分群と思うことができる。

例 **5.7.**

(i) $O(n) = E_n/\mathbb{R}^n$. $S_n/A_n = \mathbb{Z}_2$.

(ii) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ と書いて、$n = 1, 2$ の場合の幾何学的意味。

命題 **5.8.** 全ての (抽象的) 群は、群自身に作用するある変換群と同型である。とくに有限群は対称群の部分群と同型である。

Proof. 群 G の左正則作用による。 □

[光学異性体]

正 4 面体の 4 つの頂点に数字 $\{1,2,3,4\}$ を対応させることにより、正 4 面体群は、$X=\{1,2,3,4\}$ に作用する。この作用により正 4 面体群は、4 次交代群 A_4 と同一視できる。

一方、正 4 面体を正 4 面体に移す変換を、回転群 $SO(3)$ の要素だけでなく、直交群 $O(4)$ にまで広げて作用を考えると、4 次対称群 S_4 を得る。

さて、(4 面体の) 各頂点に m 種類の原子を配列すると、その可能性は集合 Y^X $(|Y|=m)$ で記述される。この原子配列の集合 Y^X への群 A_4, S_4 の作用による軌道の違いについて調べて見ると、$m\leq 3$ については、どちらの作用でも同一の軌道が得られる一方で、4 種類の原子の配列集合においては、S_4 の作用では推移的になるのに対して、A_4 の作用では、2 つの異なる軌道が得られる。この違いが、光学異性体の存在に関する数学的説明となる。より感覚的には、右手系と左手系の違い、でもある。

逆にみると、(結合の仕方も含めて) 3 種類以下の配列では、正 4 面体型の光学異性体は出現しない、ということでもある。

6 対称群

この節では、n 次の対称群 S_n を専ら扱う。与えられた 2 つの数字 $i\neq j\in\{1,2,\ldots,n\}$ に対して、i と j を入れ替えてそれ以外の数字はそのままにしておく置換を互換 (transposition) と呼び、(ij) という記号で表す。S_n の中に互換は、ちょうど $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ 個だけある。とくに隣り合った二文字の互換 $(i\ i+1)$ を基本互換と呼ぶ。基本互換は、$n-1$ 個だけある。

命題 **6.1 (あみだ籤の原理).** 対称群 S_n は基本互換 $\{(1\ 2),(2\ 3),\ldots,(n-1\ n)\}$ によって生成される。

置換 σ の符号を $\epsilon(\sigma)$ で表す。n 次元の基本ベクトルを $e_1,\ldots,e_n$ で表すとき、

$$\epsilon(\sigma)=\det(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$