から等式

$$|G| = |G/H||H|$$

を得る。 □

命題 4.20. 剰余類空間 G/H には、G が自然に左から作用し、点 $x = gH$ における安定部分群は $G(x) = gHg^{-1}$ で与えられる。とくに $x = H$ のときは、$G(x) = H$ である。

逆に、与えられた左作用 $G \times X \to X$ に対して、自然な双射

$$G/G(x) \to Gx$$

が存在し、G の左作用を保つ。

より一般に次のことが成り立つ。

命題 4.21. 双作用 $G \times X \times H \to X$ が与えられると、$G\backslash X$ は H の自然な右作用をもち、X/H は G の自然な左作用をもち、さらに自然な同一視

$$G\backslash(X/H) = G\backslash X/H = (G\backslash X)/H$$

が存在する。

定理 4.22. 有限群 G の有限集合 X への作用について、

$$|X| = \sum_{[x]\in G\backslash X} \frac{|G|}{|G(x)|}$$

が成り立つ。ここで、$[x]$ は $x \in X$ を通る軌道を表し、右辺の和は軌道空間の代表元について取る。

5 商群

オイラーの公式による $\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}$ への回転作用を考えよう。回転行列による１次変換を通じて、$\mathbb{R}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ に回転角をパラメータとして作用する。この作用においては、回転角の 2π だけの違いは効いてこず、作用を考える上で「無駄」な部分となっている。

一般に、作用の**核** (kernel) とは、

$$N = \{g \in G; gx = x, \forall x \in X\} = \bigcap_{x\in X} G(x)$$

のこと。作用という観点からは「無駄な」部分を表す。N は G の部分群であるが、さらに $gNg^{-1} = N$ という著しい性質をみたす。

例 5.1. 部分群 $S_{n-1} \subset S_n$ は、この性質をもたない。

定義 5.2. 群 G の部分群 N が、$gNg^{-1} = N$ for all $g \in G$ という性質をもつとき、**正規部分群** (normal subgroup) と呼ぶ。

正規部分群に対しては、$gN = Ng$ となるので、g の左剰余類と右剰余類は完全に一致する。この意味で、$N \backslash G = G/N$ となる。さらに、G/N における積を

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

で定義することができて、G/N は再び群になる。これを**商群** (quotient group) とよぶ。定義がうまくいっている (well-defined)、ということ。

例 5.3.

(i) $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(ii) 商ベクトル空間。

群 G からもうひとつの群 H への写像 $\varphi : G \to H$ で $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ となるものを**準同型写像** (homomorphism) という。

例 5.4. 群 G の集合 X への作用を考えることと、G から一般変換群 $GT(X)$ への準同型 $G \to GT(X)$ を考えることは、同等のことである。

homo も iso も「等しい、同一」という意味（ラテン語とギリシャ語？）の言葉であるが、数学の用語としては、homo は「似ている」、iso は「同じ」というニュアンスで使い分けている。

問 20. 準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、$\varphi(1_G) = 1_H$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ である。

例 5.5.

(i) 指数関数は、$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像になっている。

(ii) 対称群 S_n の元（置換）σ にその符号 $\epsilon(\sigma)$ を対応させる写像は、S_n から $\mathbb{Z}_2$ への準同型写像である。

(iii) 行列式は、$GL(n,\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像になっている。

(iv) ユークリッド変換群から直交群への準同型。

(v) 特殊線型群 SL$(2,\mathbb{C})$ から１次分数変換群への準同型。

(vi) 組み紐群 (braid group) B_n と準同型写像 $B_n \to S_n$.

与えられた準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、

$$N = \{g \in G; \varphi(g) = 1\}$$

は G の正規部分群である。これを φ の**核** (kernel) という。また φ の**像** (image)

$$\varphi(G) = \{\varphi(g); g \in G\}$$

は H の部分群となる。

問 21. 準同型の像が部分群になることを確かめよ。

準同型写像 φ が全単射であるとき、**同型写像** (isomorphism) という。二つの群 G, H が**同型である** (isomorphic) とは、G から H への同型写像が存在すること定義する。同型な群は同一の構造（対称性）を表している。

問 22. 準同型写像 $\varphi : G \to H$ が単射であるための必要十分条件は、核が自明、すなわち $N = \{1\}$ となることである。

定理 5.6 (準同型定理). 与えられた準同型写像 $\varphi : G \to H$ に対して、

$$G/N \ni gN \mapsto \varphi(g) \in \varphi(G)$$

は商群 G/N から $\varphi(G)$ への同型写像を与える。

上の定理で、とくに準同型が全射であるときには、H は G の商群とみることができ、また準同型が単射であるときには、G を H の部分群と思うことができる。

例 5.7.

(i) $O(n) = E_n/\mathbb{R}^n$. $S_n/A_n = \mathbb{Z}_2$.

(ii) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ と書いて、$n = 1, 2$ の場合の幾何学的意味。

命題 5.8. 全ての（抽象的）群は、群自身に作用するある変換群と同型である。とくに有限群は対称群の部分群と同型である。

Proof. 群 G の左正則作用による。 □

[光学異性体]

正４面体の４つの頂点に数字 $\{1,2,3,4\}$ を対応させせることにより、正４面体群は、$X=\{1,2,3,4\}$ に作用する。この作用により正４面体群は、４次交代群 A_4 と同一視できる。

一方、正４面体を正４面体に移す変換を、回転群 $SO(3)$ の要素だけでなく、直交群 $O(4)$ にまで広げて作用を考えると、４次対称群 S_4 を得る。

さて、（４面体の）各頂点に m 種類の原子を配列すると、その可能性は集合 Y^X ($|Y|=m$) で記述される。この原子配列の集合 Y^X への群 A_4, S_4 の作用による軌道の違いについて調べて見ると、$m \leq 3$ については、どちらの作用でも同一の軌道が得られる一方で、4 種類の原子の配列集合においては、S_4 の作用では推移的になるのに対して、A_4 の作用では、２つの異なる軌道が得られる。この違いが、光学異性体の存在に関する数学的説明となる。より感覚的には、右手系と左手系の違い、でもある。

逆にみると、（結合の仕方も含めて）３種類以下の配列では、正４面体型の光学異性体は出現しない、ということでもある。

6 対称群

この節では、n 次の対称群 S_n を専ら扱う。与えられた２つの数字 $i \neq j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して、i と j を入れ替えてそれ以外の数字はそのままにしておく置換を**互換** (transposition) と呼び、(ij) という記号で表す。S_n の中に互換は、ちょうど $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ 個だけある。とくに隣り合った二文字の互換 $(i\ i+1)$ を基本互換と呼ぶ。基本互換は、$n-1$ 個だけある。

命題 6.1 (あみだ籤の原理). 対称群 S_n は基本互換 $\{(1\ 2),(2\ 3),\ldots,(n-1\ n)\}$ によって生成される。

置換 σ の符号を $\epsilon(\sigma)$ で表す。n 次元の基本ベクトルを $e_1,\ldots,e_n$ で表すとき、

$$\epsilon(\sigma)=\det(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$