ベクトル空間 V 和を群の演算と思うことにより群になる。これをベクトル群という。ベクトル群に対しては、積（和）の交換法則が成り立つ。

複素数全体は、積に関して群にはならないが、0 を除いた部分集合 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は、群である。

命題 3.2.

(i) 群 S において、単位元は一意的に定まる。また、S の元 s に対してその逆元も一意的に定まる。

(ii) 群の有限個の元の積は、順序を保つ限り積を取る順番によらない。

問 9. 上の命題の 2 番目の性質を変換群について確かめよ。ヒント：n 個の変換 $f_1, \ldots, f_n$ の積（合成）に関して、積（合成）を取る順番に関わらず、最終的な変換は、

$$x \mapsto f_1(f_2(\ldots f_n(x)\ldots))$$

となる。

問 10. 群において、$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ。

群 G の演算が積の形で与えられているとき、G の元 a の整数冪を

$$a^n = \begin{cases} a \ldots a \ (n \text{ 個の積}) & \text{if } n \geq 1, \\ e & \text{if } n = 0, \\ a^{-1} \ldots a^{-1} \ (|n| \text{ 個の積}) & \text{if } n \leq -1 \end{cases}$$

で定める。

問 11. 指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^m a^n = a^{m+n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

を確かめよ。

定義 3.3. 群のうちで、その元の個数が有限であるものを**有限群** (finite group) という。また、有限群 G の個数 $|G|$ を G の**位数** (order) とも呼ぶ。

例 3.4. n 次の対称群 S_n は、有限群の典型的な例になっており、その位数は $n!$ である。$|S_2| = 2$, $|S_3| = 6$, $|S_4| = 24$ など。

定義 3.5. 群 G の部分集合 H で、(i) $g, h \in H \Longrightarrow gh \in H$, (ii) $h \in H \Longrightarrow h^{-1} \in H$ であるものを G の**部分群** (subgroup) という。

群 G の（部分群とは限らない）部分集合 S があるとき、S の元およびその逆元の有限個の積で書ける G の元全体を $\langle S \rangle$ で表せば、$\langle S \rangle$ は 部分群である。これを S によって**生成された部分群**という。また、$\langle S \rangle = G$ であるとき、G は S によって生成されるという。

例 3.6. 2 面体群 D_n は、隣り合った 2 つの折り返し a, b によって生成される。

とくに、$S = \{a\}$ であるとき、a を**生成元** (generator) と呼ぶ。このとき

$$\langle S \rangle = \{a^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

を $\langle a \rangle$ とも書き、a から生成された**巡回群** (cyclic group) といった言い方をする。部分群 $\langle a \rangle$ の位数（＝個数）を、a の**位数** (order) と呼ぶ。

例 3.7. 整数 Z の部分群は、適当な整数 $m \geq 0$ に対して

$$m\mathbb{Z} = \{mn; n \in \mathbb{Z}\}$$

の形である。

例 3.8. 群 G の元 g に対して、整数の集合

$$\{n \in \mathbb{Z}; g^n = e\}$$

は、$\mathbb{Z}$ の（加法的）部分群となる。

例 3.9. 正則行列の位数について調べる。

問 12. 複素数 $z \neq 0$ の（積に関する）位数について調べよ。

群の概念を、「変換」をはなれて抽象的に考察するメリットは、見かけが異なる変換群を同定できるようになること。二つの群 G, H が同型である (isomorphic) とは、G の元を H の元に写す 1 対 1 かつ上への写像 $\varphi : G \to H$ で、

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

となるもの（同型写像, isomorphisms, という）が存在すること。同型写像 $\varphi : G \to H$ が存在すれば、その逆写像 φ^{-1} も同型写像になる。

また、同型写像は、単位元および逆元を保つ、

$$\varphi(1_G) = 1_H, \qquad \varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$$

ので、二つの群 G と H の構造は、φ を通じて完全に同一であることがわかる。

例 3.10. 同型である群の例。

(i) 正多面体群と対称群との同一視。立方体群と S_4 の同一視。正６面体の頂点と中心を結んで得られる４本の主対角線を考えると、辺の中点を通る直線の回りの１８０度の回転が、この４本の線分のうちの２本の互換を引き起こす。同様にして他の回転も４本の線分の間の自明でない置換を引き起こすので、正６面体群から S_4 への同型が得られた。

(ii) 一般線型群と行列群の同一視。

２面体群 D_n は、

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \neq (ab)^{n-1} \rangle$$

という表示をもつ。
とくに、$D_3 = S_3$ である。これは、

$$ab = (12)(23) = (123)$$

からわかる。

4 群作用

サイズが $m \times n$ の行列全体のベクトル空間を $M(m, n, \mathbb{C})$ で表す。このとき行列の積から定まる写像、$GL(m, \mathbb{C}) \times M(m, n, \mathbb{C}) \to M(m, n, \mathbb{C})$ あるいは、$M(m, n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \to M(m, n, \mathbb{C})$ は、「結合法則」をみたす。
より一般に、群 G の集合 X への**左作用** (left action) とは、G の要素 $g \in G$ と集合 X の要素 $x \in X$ を与えるごとに、X の要素 $\varphi(g, x) \in X$ が次の条件を満たすように定められていることをいう。

(i) $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$, $g, h \in G$, $x \in X$,