のいずれかである。前者の場合は、$\det(T) = t\det(A) = t$ より、$t = 1$ となって、T は e_3 を軸とする回転を表す。後者の場合は、$\det(A) = -1$ より $t = -1$ であるが、A が折り返しの行列であることから、$Te = e$ となる固有ベクトルが存在するので、e を改めて e_3 と取り直すと、前者の場合に帰着する。

問 **3.** 直交行列

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して、ベクトル e は具体的にどのように取れるか。

問 **4.** ある平面に関する折り返し (鏡映変換) は、3 次の直交行列で行列式の値が -1 であるもので表される。逆は成り立つか。

問 **5.** 4 次の直交行列について、その幾何学的な解釈が可能かどうか調べよ。

注意 . 直交群 $O(n)$ の性質は、n が偶数か奇数かで大きく異なる。その意味で、$O(2)$ は $O(3)$ よりも $O(4)$ と多くの共通点を持っている。

2 変換群

正三角形の対称性を考えるに、2 つの折り返しの変換を続けて施しても、当然正三角形を不変性にするので、これも対称性というべきである。実際、そのような変換は、正三角形の中心の廻りの 6 0 度の回転を表す。

集合 X に対して、X から X 自身への写像を X における変換 (transformation) と言う。変換に対しては逆写像という代わりに逆変換 (inverse transformation) という言い方をする。さらに X の変換で逆変換が存在するようなもの全体の集合を $GT(X)$ という記号で表し、$GT(X)$ の 2 つの元の積を写像の合成によって定めると、(i) 結合法則 $f(gh) = (fg)h$ が成り立ち、(ii) 恒等写像 e は、$ef = fe = f$ という性質を持ち、(iii) さらに、$f \in GT(X)$ の逆写像 f^{-1} は、$ff^{-1} = f^{-1}f = e$ を満たす。恒等写像はまた恒等変換 (identity transformation) とも呼ばれ、1_X という記号も使うことにする。

一般に集合 X から自分自身への写像の集まり G で、次の性質をもつものを X の変換群 (transformation group) と呼ぶ。(群の一般的な定義は次節で与える。)

(i) f が G に属していれば、その逆変換 f^{-1} が存在して G に属す。

(ii) f, g が G に属していれば、その合成 $f \circ g$ も G に属している。

集合 X の変換群 G, H が、$H \subset G$ という関係をみたすとき、H を G の部分変換群あるいは省略して部分群 (subgroup) とよぶ。

上で見た $GT(X)$ は、X の全ての変換群を部分群として含むという意味で「最大」のものになっている。これを、X の一般変換群 (general transformation group) という。

問 **6.** X の変換群 G は、恒等変換 1_X を必ず含む。

例 **2.1.**

(i) 集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対しては、変換 $\sigma \in GT(X)$ と $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列 (置換、permutation とも言う) $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ の間には 1 対 1 の対応がある。この場合の一般変換群群を n 次の対称群 (the symmetric group of degree n) と呼び、記号 S_n で表す。

(ii) 複素数 z に対して (定義域をあまり気にしないで)

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

の形の変換 (ただし、a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ なる複素数) を一次分数変換 (linear fractional transformation) とよぶ。一次分数変換全体は変換群をなす。

問 **7.** 一次分数変換全体が群をなすことを確かめよ。

集合 X に様々な構造が入っている場合には、その構造を保つような変換は X の自己同型 (automorphism) と呼ばれ、X の自己同型全体を $\mathrm{Aut}(X)$ で表せば、$\mathrm{Aut}(X)$ は $GT(X)$ の部分群として変換群となる。これを X の自己同型群 (automorphism group) とよぶ。

例 **2.2.** 集合 X がベクトル空間のときは、$\mathrm{Aut}(X)$ は、線型変換の作る群であり、$\mathrm{GL}(X)$ と表記され、一般線型群 (general linear group) と呼ばれる。とくに $X = \mathbb{R}^n$ $(X = \mathbb{C}^n)$ のときには、$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ と書き、これらは行列の作る群と同一視される。

例 **2.3.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における、いわゆる変数変換全体は、$\mathbb{R}^n$ の「微分構造」を保つ変換群 $\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n)$ を成す。

例 **2.4.** ベクトル空間がさらに内積空間であるときには、$\mathrm{Aut}(X)$ はユニタリー変換 (あるいは直交変換) の作る群となる。これらは、$GL(X)$ の部分群となり、とくに行列群に対しては、$U(n)$ (あるいは $O(n)$) と書かれユニタリー群 (あるいは直交群) と称される。

とくに、$U(1)$ は、絶対値 1 の複素数全体 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ と同一視され、$\mathbb{T}$ における群演算は、複素数の積のそれと一致する。

例 **2.5.** 一般線型群 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ は、$\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n)$ の部分群である。

補題 **2.6.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して、

$$T : x \mapsto Ax + b, \qquad A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$$

の形の変換 (ユークリッド変換という) 全体は、群を作る。これをユークリッド変換群 (Euclidean transformation group) と称する。

ユークリッド変換は 2 点間の距離を保つ。すなわち、

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

である。

命題 **2.7.** 逆に、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の距離を保つ変換は、上の補題で与えた形で書ける。

Proof. まず、T と $-T(0)$ による平行移動との合成を A と書くことにすると、A は長さを保ちかつ $A(0) = 0$ をみたす。さらに A が内積を保つことに注意する。

次に、正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対して、$Ae_1, \ldots, Ae_n$ も正規直交基底になる。

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

と表すとき、$(Ae_j|Ax) = (e_j|x) = x_j$ より、

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} (Ae_j|Ax) Ae_j = \sum_{j=1}^{n} x_j Ae_j$$

となり、これから A の線型性がわかる。

最後に内積保存から、A は直交変換である。 □

例 **2.8.** 多面体群。5 種類の正多面体 (Platonic solids) がある。

正 4 面体 (tetrahedron)、正 6 面体 (hexahedron, cube)、正 8 面体 (octahedron)、正 1 2 面体 (dodecahedron)、正 2 0 面体 (icosahedron)。

f	e	v	n
4	6	4	3
6	12	8	4
8	12	6	3
12	30	20	5
20	30	12	3

各正多面体の中心を原点にとする回転 (の行列) で、多面体の頂点を頂点に移すもの全体は、群をなす。

4 面体群 (the tetrahedral group) = A_4,

6 面体群 = 8 面体群 = S_4,

1 2 面体群 = 2 0 面体群 = A_5.

正多面体が「縮退」した場合として、正 n 角形の板を空間の中で考え、その中心を原点にとり回転の行列で、頂点を頂点に移すもの全体もやはり群になる。これを 2 面体群 (the dihedral group) といって、記号 D_n で表す。平面上の変換として、D_n の恒等変換以外の元は、n 角形の n 本の対称軸の回りの折り返しかまたは、平面内の回転 (回転角は、$2\pi k/n$, $k = 1, \ldots, n-1$) である。全体として、$2n$ 個の (空間) 回転から成る。

例 **2.9.** 正 6 面体群に属する回転を調べるために、回転軸の選び方で 3 種類に分類する。

(i) 面の中心と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、6 面 / 2 = 3 軸で、その回転角は 9 0 度の整数倍となるから、恒等変換を除くと、3 通り。

(ii) 頂点と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、8 頂点 / 2 = 4 軸で、その回転角は 1 2 0 度の整数倍となるから (回転軸方向から 6 面体を見ると、正 6 角形をひし形で分割した形)、恒等変換を除くと、2 通り。

(iii) 辺の中点と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、1 2 辺 / 2 = 6 軸で、その回転角は 1 8 0 度に限るので、1 通り。

以上の回転に恒等変換を加えると、正 6 面体群の要素の数は、

$$3 \times 3 + 4 \times 2 + 6 \times 1 + 1 = 24$$

となる。

例 **2.10.** 二面体群 D_n は、 2 つの対合 a, b で生成される。

$$D_n = \langle a, b \rangle.$$

例 **2.11.** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[X]) \cong \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$.

$$f(X) \mapsto f(aX + b).$$

例 **2.12 (代数方程式の対称性).** 有理数を係数とする n 次多項式 $P(z)$ で、方程式 $P(z) = 0$ が重根を持たない (すなわち、$P(z)$ と $P'(z)$ が互いに素) であるものに対して、この方程式の n 個の根を $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ と表す。このとき、方程式 $P = 0$ の対称性を表す群 G とは、n 文字の置換 σ で、「有理数を係数にもつ n 変数の多項式 $f(z_1, \ldots, z_n)$ が $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ をみたすならば、いつでも $f(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) = 0$ が成り立つ。」という条件をみたすもの全体。

問 **8.** 直方体の対称群を $SO(3)$ の部分群として記述せよ。(面の中心を通る軸の回りの１８０度の回転。４元群。)

3 群とその同型

より抽象的に、集合 S の 2 つの元 a, b に対して S の元 $a * b$ が定められていて、言い方を換えれば、写像 $S \times S \to S$ が与えられていて (このような写像を二項演算 (binary operation) という)

(i) 結合法則 $a * (b * c) = (a * b) * c$ が成り立ち、

(ii) すべての $a \in S$ に対して、$e * a = a * e = a$ となるような元 $e \in S$ (単位元、unit element、という) が存在し、

(iii) さらに、各 $a \in S$ に対して、$a * a' = a' * a = e$ となる元 $a' \in S$ (a の逆元、inverse element、という) が存在する

とき、このような演算の構造をもった集合 S を群 (group) と称する。

二項演算の記号は、しばしば省略され積の記号 ab で代用される。また、そのときには、逆元を記号 a^{-1} で表すのが普通である。

例 **3.1.**

前節で見た変換群は群の例になっている。