のいずれかである。前者の場合は、$\det(T) = t\det(A) = t$ より、$t = 1$ となって、$T$ は $e_3$ を軸とする回転を表す。後者の場合は、$\det(A) = -1$ より $t = -1$ であるが、$A$ が折り返しの行列であることから、$Te = e$ となる固有ベクトルが存在するので、$e$ を改めて $e_3$ と取り直すと、前者の場合に帰着する。

**問 3.** 直交行列

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して、ベクトル $e$ は具体的にどのように取れるか。

**問 4.** ある平面に関する折り返し（鏡映変換）は、３次の直交行列で行列式の値が $-1$ であるもので表される。逆は成り立つか。

**問 5.** ４次の直交行列について、その幾何学的な解釈が可能かどうか調べよ。

注意．直交群 $O(n)$ の性質は、$n$ が偶数か奇数かで大きく異なる。その意味で、$O(2)$ は $O(3)$ よりも $O(4)$ と多くの共通点を持っている。

## 2　変換群

正三角形の対称性を考えるに、２つの折り返しの変換を続けて施しても、当然正三角形を不変性にするので、これも対称性というべきである。実際、そのような変換は、正三角形の中心の廻りの６０度の回転を表す。

集合 $X$ に対して、$X$ から $X$ 自身への写像を $X$ における**変換** (transformation) と言う。変換に対しては逆写像という代わりに**逆変換** (inverse transformation) という言い方をする。さらに $X$ の変換で逆変換が存在するようなもの全体の集合を $GT(X)$ という記号で表し、$GT(X)$ の２つの元の積を写像の合成によって定めると、(i) 結合法則 $f(gh) = (fg)h$ が成り立ち、(ii) 恒等写像 $e$ は、$ef = fe = f$ という性質を持ち、(iii) さらに、$f \in GT(X)$ の逆写像 $f^{-1}$ は、$ff^{-1} = f^{-1}f = e$ を満たす。恒等写像はまた**恒等変換** (identity transformation) とも呼ばれ、$1_X$ という記号も使うことにする。

一般に集合 $X$ から自分自身への写像の集まり $G$ で、次の性質をもつものを $X$ の**変換群** (transformation group) と呼ぶ。（群の一般的な定義は次節で与える。）

(i) $f$ が $G$ に属していれば、その逆変換 $f^{-1}$ が存在して $G$ に属す。

(ii) $f, g$ が $G$ に属していれば、その合成 $f \circ g$ も $G$ に属している。

集合 $X$ の変換群 $G, H$ が、$H \subset G$ という関係をみたすとき、$H$ を $G$ の部分変換群あるいは省略して**部分群** (subgroup) とよぶ。

上で見た $GT(X)$ は、$X$ の全ての変換群を部分群として含むという意味で「最大」のものになっている。これを、$X$ の**一般変換群** (general transformation group) という。

**問 6.** $X$ の変換群 $G$ は、恒等変換 $1_X$ を必ず含む。

**例 2.1.**

(i) 集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対しては、変換 $\sigma \in GT(X)$ と $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列（置換、permutation とも言う）$(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ の間には 1 対 1 の対応がある。この場合の一般変換群群を $n$ **次の対称群** (the symmetric group of degree $n$) と呼び、記号 $S_n$ で表す。

(ii) 複素数 $z$ に対して（定義域をあまり気にしないで）

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

の形の変換（ただし、$a, b, c, d$ は $ad - bc \neq 0$ なる複素数）を**一次分数変換** (linear fractional transformation) とよぶ。一次分数変換全体は変換群をなす。

**問 7.** 一次分数変換全体が群をなすことを確かめよ。

集合 $X$ に様々な構造が入っている場合には、その構造を保つような変換は $X$ の**自己同型** (automorphism) と呼ばれ、$X$ の自己同型全体を $\mathrm{Aut}(X)$ で表せば、$\mathrm{Aut}(X)$ は $GT(X)$ の部分群として変換群となる。これを $X$ の**自己同型群** (automorphism group) とよぶ。

**例 2.2.** 集合 $X$ がベクトル空間のときは、$\mathrm{Aut}(X)$ は、線型変換の作る群であり、$\mathrm{GL}(X)$ と表記され、**一般線型群** (general linear group) と呼ばれる。とくに $X = \mathbb{R}^n$ ($X = \mathbb{C}^n$) のときには、$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) と書き、これらは行列の作る群と同一視される。

**例 2.3.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における、いわゆる変数変換全体は、$\mathbb{R}^n$ の「微分構造」を保つ変換群 $\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n)$ を成す。

**例 2.4.** ベクトル空間がさらに内積空間であるときには、$\mathrm{Aut}(X)$ はユニタリー変換（あるいは直交変換）の作る群となる。これらは、$GL(X)$ の部分群となり、とくに行列群に対しては、$U(n)$ (あるいは $O(n)$) と書かれユニタリー群（あるいは直交群）と称される。

とくに、$U(1)$ は、絶対値 1 の複素数全体 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ と同一視され、$\mathbb{T}$ における群演算は、複素数の積のそれと一致する。

**例 2.5.** 一般線型群 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ は、*Diff*$(\mathbb{R}^n)$ の部分群である。

**補題 2.6.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して、

$$T : x \mapsto Ax + b, \qquad A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$$

の形の変換（ユークリッド変換という）全体は、群を作る。これを**ユークリッド変換群** (Euclidean transformation group) と称する。

ユークリッド変換は２点間の距離を保つ。すなわち、

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

である。

**命題 2.7.** 逆に、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の距離を保つ変換は、上の補題で与えた形で書ける。

*Proof.* まず、$T$ と $-T(0)$ による平行移動との合成を $A$ と書くことにすると、$A$ は長さを保ちかつ $A(0) = 0$ をみたす。さらに $A$ が内積を保つことに注意する。

次に、正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ に対して、$Ae_1, \dots, Ae_n$ も正規直交基底になる。

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$

と表すとき、$(Ae_j|Ax) = (e_j|x) = x_j$ より、

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} (Ae_j|Ax)Ae_j = \sum_{j=1}^{n} x_jAe_j$$

となり、これから $A$ の線型性がわかる。

最後に内積保存から、$A$ は直交変換である。 □

**例 2.8.** 多面体群。５種類の正多面体 (Platonic solids) がある。

正４面体 (tetrahedron)、正６面体 (hexahedron, cube)、正８面体 (octahedron)、正１２面体 (dodecahedron)、正２０面体 (icosahedron)。

| f | e | v | n |
|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 4 | 3 |
| 6 | 12 | 8 | 4 |
| 8 | 12 | 6 | 3 |
| 12 | 30 | 20 | 5 |
| 20 | 30 | 12 | 3 |

各正多面体の中心を原点にとする回転（の行列）で、多面体の頂点を頂点に移すもの全体は、群をなす。

**４面体群** (the tetrahedral group) ＝ $A_4$,

**６面体群＝８面体群**＝ $S_4$,

**１２面体群＝２０面体群**＝ $A_5$.

正多面体が「縮退」した場合として、正 $n$ 角形の板を空間の中で考え、その中心を原点にとり回転の行列で、頂点を頂点に移すもの全体もやはり群になる。これを**２面体群** (the dihedral group) といって、記号 $D_n$ で表す。平面上の変換として、$D_n$ の恒等変換以外の元は、$n$ 角形の $n$ 本の対称軸の回りの折り返しかまたは、平面内の回転（回転角は、$2\pi k/n$, $k = 1, \ldots, n-1$）である。全体として、$2n$ 個の (空間) 回転から成る。

**例 2.9.** 正６面体群に属する回転を調べるために、回転軸の選び方で３種類に分類する。

(i) 面の中心と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、６面／２＝３軸で、その回転角は９０度の整数倍となるから、恒等変換を除くと、３通り。

(ii) 頂点と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、８頂点／２＝４軸で、その回転角は１２０度の整数倍となるから（回転軸方向から６面体を見ると、正６角形をひし形で分割した形）、恒等変換を除くと、２通り。

(iii) 辺の中点と原点を結ぶ直線を回転軸とするものは、１２辺／２＝６軸で、その回転角は１８０度に限るので、１通り。

以上の回転に恒等変換を加えると、正６面体群の要素の数は、

$$3 \times 3 + 4 \times 2 + 6 \times 1 + 1 = 24$$

となる。

**例 2.10.** 二面体群 $D_n$ は、２つの対合 $a, b$ で生成される。

$$D_n = \langle a, b \rangle.$$

**例 2.11.** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[X]) \cong \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$.

$$f(X) \mapsto f(aX + b).$$

**例 2.12 (代数方程式の対称性).** 有理数を係数とする $n$ 次多項式 $P(z)$ で、方程式 $P(z) = 0$ が重根を持たない（すなわち、$P(z)$ と $P'(z)$ が互いに素）であるものに対して、この方程式の $n$ 個の根を $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ と表す。このとき、方程式 $P = 0$ の対称性を表す群 $G$ とは、$n$ 文字の置換 $\sigma$ で、「有理数を係数にもつ $n$ 変数の多項式 $f(z_1, \ldots, z_n)$ が $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ をみたすならば、いつでも $f(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) = 0$ が成り立つ。」という条件をみたすもの全体。

**問 8.** 直方体の対称群を $SO(3)$ の部分群として記述せよ。（面の中心を通る軸の回りの１８０度の回転。４元群。）

# 3　群とその同型

より抽象的に、集合 $S$ の２つの元 $a, b$ に対して $S$ の元 $a * b$ が定められていて、言い方を換えれば、写像 $S \times S \to S$ が与えられていて（このような写像を二項演算 (binary operation) という)、

(i) 結合法則 $a * (b * c) = (a * b) * c$ が成り立ち、

(ii) すべての $a \in S$ に対して、$e * a = a * e = a$ となるような元 $e \in S$ (**単位元**、unit element、という）が存在し、

(iii) さらに、各 $a \in S$ に対して、$a * a' = a' * a = e$ となる元 $a' \in S$ ($a$ の**逆元**、inverse element、という）が存在する

とき、このような演算の構造をもった集合 $S$ を**群** (group) と称する。

二項演算の記号は、しばしば省略され積の記号 $ab$ で代用される。また、そのときには、逆元を記号 $a^{-1}$ で表すのが普通である。

**例 3.1.**

前節で見た変換群は群の例になっている。