群論入門

山上　滋

平成 15 年 4 月 14 日

「群論」の授業というと、代数の一部として教えられることが多いようですが、もっと適用範囲の広い汎用性のある概念です。群論に限らず、代数系の本は「代数学」に片寄りすぎかも知れません。代数方程式論に由来するという歴史的事実があるにしても、「群」という概念の重要性は、対称性の記述のためにこそあるのであって、もっと幾何学的な視点があってしかるべきですし、また解析的な題材も取り上げられるべきでしょう。群に関連する諸概念を孤立した形で列挙するのは、理解する上での妨げになるだけでなくその応用力をも限定しかねません。

このノートでは、そういった点に配慮して、群の概念そのものよりも、「群の作用」を中心に据えた説明を心がけました。群論の授業でつねに問題になる剰余類の扱いについても、作用による軌道分解により導入します。少しは、直感的なイメージが得られるのではないかとの期待からです。

こういった目的に合った教科書がなかなか見当たらないのですが、多少なりとも近いものとして、

- M.A. Armstrong, Groups and Symmetry, Springer-Verlag, NewYork, 1988
- 志賀浩二「群論への３０講」、朝倉書店 (1989)

を参考書として挙げておきます。

目 次

1　図形の対称性　2

2 変換群 **5**

3 群とその同型 **9**

4 群作用 **13**

5 商群 **18**

6 対称群 **20**

7 アーベル群 **22**

8 存在定理 **24**

9 自由群 **25**

10 軌道数公式 **27**

1 図形の対称性

ベクトル空間の基底と座標系。物理的見方の説明と数学的形式との関係。

$$x = \sum_j x_j e_j = \begin{pmatrix} e_1, & \dots & , e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

一次変換と行列表示について復習。

$$\begin{pmatrix} Te_1, & \dots & , Te_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & \dots & , e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n)[T].$$

１次変換 T と行列表示 $[T]$ との間には、

$$[S+T] = [S] + [T], \quad [\lambda T] = \lambda [T], \qquad [ST] = [S][T]$$

という関係が成り立つ。

変換と対称性の例：図形の対称性を数学的に表現する方法として、変換に関する不変性を考えるのが、自然でありかつ有用でもある。例えば、

二等辺三角形の対称性は、二等辺以外の辺の垂直ニ等分線に関する折り返し（これがここでの変換である）に関して「不変」であるという事実に集約される。二等辺三角形が正三角形になると、折り返しを行いうる対称軸の取り方が増し、対称性が高まるという直感にも合致している。このように対称性を考える上で重要な変換として、次のものがある。

(i) 折り返し、左右対称。鏡像と上下対称。（意識の問題？）

(ii) 回転。（カードの図柄）

(iii) 平行移動（繰り返し）と格子点。

この節では、こういった図形の対称性に密接に関係する変換について、線型代数からの復習を行う。

回転の行列と折り返しの行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

前者は、反時計回り（左回り）に角度 θ の回転を表し、後者は、直線 $x\sin(\theta/2) = y\cos(\theta/2)$ に関する折り返しを表す。

例 1.1. 平面上の原点のまわりの回転 R, 原点を通る直線 l に関する折り返し L に対して、変換 RLR^{-1} は直線 Rl に関する折り返しを表す。

正方行列 T に対して、次の 3 条件は同値である。

(i) 直交行列である、 ${}^tTT = T{}^tT = I$.

(ii) 内積を保存する、$(Tx|Ty) = (x|y)$ for $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) ベクトルの長さを変えない、$\|Tx\| = \|x\|$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

問 1. このことを線型代数の教科書で復習する。

n 次の**直交行列** (orthogonal matrix) 全体を記号 $O(n)$ で表す。

問 2. 2 次の直交行列は、回転か折り返しのいずれかである。また、2 次の直交行列が、回転を表すか、折り返しを表すかは、行列式の値が ± 1 のいずれであるかで区別される。

長さを変えない変換変換としては、直交変換と平行移動を組み合せた次のような変換もある。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

このように、1次変換と平行移動を組み合せたものを**アフィン変換** (affine transformation) と呼ぶ。

複素数を使った表示。オイラーの公式。

$$z \mapsto e^{i\theta} z + c$$
$$z \mapsto e^{i\theta} \overline{z} + c.$$

平行移動は回転の極限である。

3次元の場合。ある座標原点を通る直線のまわりの回転は、e_3 を回転軸の方向ベクトルに一致させると、

$$T \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、${}^tTT = T{}^tT = I$, $\det(T) = 1$ をみたす。

逆に、このような直交行列 T に対しては、実係数3次方程式の解として、実固有値 t を持つので、対応する長さ 1 の実固有ベクトル e_3 をベクトル e_1, e_2 を補って、正規直交基底 e_1, e_2, e_3 を作り、これに関する T の行列表示を考えると、

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

の形になるので、$t = \pm 1$ であり、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は2次の直交行列である。したがって、

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

のいずれかである。前者の場合は、$\det(T) = t\det(A) = t$ より、$t = 1$ となって、T は e_3 を軸とする回転を表す。後者の場合は、$\det(A) = -1$ より $t = -1$ であるが、A が折り返しの行列であることから、$Te = e$ となる固有ベクトルが存在するので、e を改めて e_3 と取り直すと、前者の場合に帰着する。

問 3. 直交行列

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}$$

に対して、ベクトル e は具体的にどのように取れるか。

問 4. ある平面に関する折り返し（鏡映変換）は、３次の直交行列で行列式の値が -1 であるもので表される。逆は成り立つか。

問 5. ４次の直交行列について、その幾何学的な解釈が可能かどうか調べよ。

注意．直交群 $O(n)$ の性質は、n が偶数か奇数かで大きく異なる。その意味で、$O(2)$ は $O(3)$ よりも $O(4)$ と多くの共通点を持っている。

2　変換群

正三角形の対称性を考えるに、２つの折り返しの変換を続けて施しても、当然正三角形を不変性にするので、これも対称性というべきである。実際、そのような変換は、正三角形の中心の廻りの６０度の回転を表す。

集合 X に対して、X から X 自身への写像を X における**変換** (transformation) と言う。変換に対しては逆写像という代わりに**逆変換** (inverse transformation) という言い方をする。さらに X の変換で逆変換が存在するようなもの全体の集合を $GT(X)$ という記号で表し、$GT(X)$ の２つの元の積を写像の合成によって定めると、(i) 結合法則 $f(gh) = (fg)h$ が成り立ち、(ii) 恒等写像 e は、$ef = fe = f$ という性質を持ち、(iii) さらに、$f \in GT(X)$ の逆写像 f^{-1} は、$ff^{-1} = f^{-1}f = e$ を満たす。

一般に集合 X から自分自身への写像の集まり G で、次の性質をもつものを X の**変換群** (transformation group) と呼ぶ。（群の一般的な定義は次節で与える。）