GR 09/12/24

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 3つの要素 r, g, b からなる集合を C とし、直積集合 $C \times C \times C = \{(x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in C\}$ を X で表す。3次対称群 S_3 の X への作用を

$$\sigma x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in X$$

で定める。

すべての軌道を列挙し、軌道空間の大きさ（軌道の個数）を求めよ。

X の要素を色の配列と思うと、その軌道は、混ぜ合わせた色が同じになるもの、と解釈できる。そこで、使用する色数に着目して、(i) 単色、(ii) 二色（うち一色は二度使う）、(iii) 三色の場合に分けると、

(i) 使う色の組み合わせは、r, g, b の3通りで、

$$\{(r,r,r)\}, \quad \{(g,g,g)\}, \quad \{(b.b.b)\}$$

という大きさ 1 の軌道が3個得られる。

(ii) 一度使う色の選び方は3通りで、二度使う色は、残りの二色のいずれか2通りなので、$3 \times 2 = 6$ 通りの可能性があり、それぞれに対して、並べ替えをおこなったもの全体が一つの軌道になるので、大きさが 3 の軌道が6個得られる。

$$\begin{gathered}\{(r,g,g),(g,r,g),(g,g,r)\},\\ \{(r,b,b),(b,r,b),(b,b,r)\},\\ \{(g,r,r),(r,g,r),(r,r,g)\},\\ \{(g,b,b),(b,g,b),(b,b,g)\},\\ \{(b,r,r),(r,b,r),(r,r,b)\},\\ \{(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b)\}\end{gathered}$$

(iii) 三色全てを使うので、r, g, b の並べ替え全体が一つの軌道を構成する。

$$\{(r,g,b),(r,b,g),(g,r,b),(g,b,r),(b,r,g),(b,g,r)\}.$$

以上により、軌道の総数は、$3 + 6 + 1 = 10$ である。

$\boxed{2}$ ４次対称群 $G = S_4$ を、変数の入れ替えにより、４変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の多項式の作る集合に作用させる。また、$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$ とする。

(i) 固定部分群 $G(f)$ を求めよ。

(ii) 軌道 Gf を求めよ。

(iii) 剰余類空間 $G/G(f)$ の代表系を一組求めよ。

(i) 式の形から、x_1x_2 の部分は x_1x_2 に、x_3x_4 の部分も x_3x_4 に移す場合に限るので、

$$G(f) = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$$

である。

(ii) 実際に変数を入れ替えて出てくるものを並べると、

$$Gf = \{x_1x_2-x_3x_4, x_1x_3-x_2x_4, x_1x_4-x_2x_3, x_2x_3-x_1x_4, x_2x_4-x_1x_3, x_3x_4-x_1x_2\}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
x_1x_2 - x_3x_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} f, \quad & x_1x_3 - x_2x_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} f, \\
x_1x_4 - x_2x_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} f, \quad & x_2x_3 - x_1x_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} f, \\
x_2x_4 - x_1x_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} f, \quad & x_3x_4 - x_1x_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} f
\end{aligned}$$

であるから、$G/G(f)$ の代表系として、

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る。