GR 09/11/30

$\boxed{1}$ 次の５つの群の中で同型なものはどれとどれか、簡単な理由を添えて述べよ。

$$\mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \quad C_6, \quad C_2 \times C_3, \quad \mathbb{Z}_2 \times C_3.$$

上の５つの群はすべて同型である。まず、$C_n \cong \mathbb{Z}_n$ が一般に成り立つ。したがって、

$$C_6 \cong \mathbb{Z}_6, \quad C_2 \times C_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \times C_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

である。次に、m と n が互いに素であるとき $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ であることに注意すれば、

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

となって、すべてが $\mathbb{Z}_6$ に同型である。

$\boxed{2}$

(i) ３次対称群 S_3 の各要素の位数を求めよ。

(ii) ３次対称群 S_3 の巡回部分群 (巡回群である部分群) をすべて求めよ。

位数の定義に基づいて計算すれば、

$$\mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 1, \quad \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = 2,$$
$$\mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = 3, \quad \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = 3.$$

巡回置換については、$(123)(123) = (132)$ であることから、

$$\langle (123) \rangle = \{e, (123), (132)\} = \langle (132) \rangle$$

に注意すれば、巡回部分群は、

$$\{e\}, \quad \{e, (23)\}, \quad \{e, (13)\}, \quad \{e, (12)\}, \quad \{e, (123), (312)\}$$

の５通り。