問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$

(i) 群の定義を述べよ。

(ii) 有限群、無限群、可換群、非可換群について説明し、それぞれの例を一つずつ挙げよ。

解答は略す。各自、確認されたい。

$\boxed{2}$

(i) 3 次の対称群 S_3 の部分集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は部分群でない。実際、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

は、この部分集合からはみ出る。

(ii) 次の行列の集合が、行列の積に関して群になるかどうか判定せよ。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}; a,\, b,\, c \text{ は実数で、} a \neq 0,\, c \neq 0 \text{ を満たす} \right\}.$$

S は、$GL(2, \mathbb{C})$ の部分群であり、したがって群であるる。実際、

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix}$$

であるから、$aa' \neq 0,\, cc' \neq 0$ に注意すれば、S は積について閉じている。また、$I \in S$ であるから単位元を含み、さらに

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/ac & 1/c \end{pmatrix} \in S$$

であることからわかる。