$\boxed{1}$

(i) 群 G の２つの元 a, b が共役であるとは、$a = gbg^{-1}$ となるような G の元 g が存在すること。集合 G における同値関係を与える。

(ii) ７次の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

の巡回分解は、$(1\ 5)\,(3\ 4)\,(2\ 6\ 7)$ である。

(iii) 上の７次の置換と（S_7 の中で）共役な置換は、上で求めた巡回分解と同じ形の巡回分解を持てばよいので、３次の巡回置換の選び方は、７数字から３数字を選びそれから巡回置換を構成する方法だけあるので、$2\binom{7}{3} = 70$ 通り。さらに、残りの４数字を２組の互換の積に分ける方法は、$\dfrac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ 通りあるので、求める置換は全部で $70 \times 3 = 210$ 個ある。

$\boxed{2}$ 円周を９等分し、各部分を予め与えられた n 色の中のいずれかの色で塗る場合の彩色数について考える。ただし、回転により同じになる塗り方は、区別しない。

色の集合を Y とし、円周上の９つの部分を時計回りに $1, 2, \ldots, 9$ と番号付けして区別すると、一つの彩色方法に対して、９通りの色順列

$$(y_1, y_2, \ldots, y_9),\ (y_2, y_3, \ldots, y_9, y_1),\ \cdots,\ (y_9, y_1, \ldots, y_8)$$

が得られる。これらは、巡回群 $G = C_9$ の色順列集合 $X = Y^9$ への巡回作用に関する軌道になっており、逆も成り立つ。すなわち、彩色方法と軌道とは一対一に対応する。そこで、軌道数公式

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X^g|$$

および

$$|X^g| = \begin{cases} n & \text{if } g = (12\ldots9)^k \text{ with } k = 1,2,4,5,7,8, \\ n^3 & \text{if } g = (12\ldots9)^k \text{ with } k = 3,6, \\ n^9 & \text{if } g = e \end{cases}$$

に注意して、彩色数を求めると、

$$\frac{n^9 + 2n^3 + 6n}{9}$$

を得る。