$\boxed{1}$ 群 G から群 G' への写像 φ が準同型（写像）であるとは、

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \qquad \forall a, b \in G$$

となること。

(i) 加法群 $\mathbb{Z}_3$ から加法群 $\mathbb{Z}_6$ への写像 $\varphi([k]_3) = [2k]_6$ は準同型である。実際、

$$\varphi([k]_3 + [l]_3) = \varphi([k+l]_3) = [2(k+l)]_6 = [2k]_6 + [2l]_6 = \varphi([k]_3) + \varphi([l]_3)$$

である。因みに、φ が、well-defined であることは、$k - k' \in 3\mathbb{Z} \Longrightarrow 2k - 2k' \in 6\mathbb{Z}$ からわかる。

(ii) 加法群 $\mathbb{Z}$ から 3 次の対称群 S_3 への写像 $\varphi(k) = (1\ 2\ 3)^k\,(1\ 2)^k$ は準同型ではない。実際、$\varphi(1)\varphi(1) = 1 \neq (132) = \varphi(2)$ である。

(iii) 行列群 $GL(2, \mathbb{C})$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像 $\varphi(g) = \det(g)^{-1}$ は準同型である。実際、

$$\varphi(gh) = \det(gh)^{-1} = (\det(g)\det(h))^{-1} = \det(g)^{-1}\det(h)^{-1} = \varphi(g)\varphi(h).$$

$\boxed{2}$ 群 G の要素 g の位数 $\mathrm{ord}(g)$ は

$$\mathrm{ord}(g) = \inf\{n \in \mathbb{N}; g^n = e\}$$

で定められる自然数または ∞ である。ここで e は G の単位元を表わす。

(i) 加法群 $\mathbb{Z}_{12}$ において、

g	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
$\mathrm{ord}(g)$	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

(ii) 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の要素 $g = e^{3\pi i/5}$ の位数は $\mathrm{ord}(g) = 10$.

$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ では、$\boxed{1}$ の方が総じて出来が悪かった。計算はできても証明したり反例を挙げることが苦手であるのは、しようがないとしても、皆さんが大学で数学を学ぶ意義は、むしろこの分析し説明（証明または反例）する部分にあるので、その重要性をしかと認識し、稽古を重ねるべきである。