$\boxed{1}$ 部分群の定義を述べ、それに基づいて以下の部分集合が部分群になっているかどうか判定せよ。

(i) $\mathbb{Z}_6$ の部分集合 $A = \{[0], [3], [5]\}$.

(ii) $S_3$ の部分集合 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(i) 群 $G$ の部分集合 $H \neq \emptyset$ が $G$ の部分群であるとは、(1) $a, b \in H \Longrightarrow ab \in H$、(2) $a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$ という 2 つの性質を満たすこと。(より正式には、群 $G$ の部分集合 $H$ で、$G$ の演算に関して群になっているもの、と述べるべきであろうが。)

与えられた部分集合 $A$ が部分群でないことは、例えば $[3] + [5] = [2] \notin A$ より (1) が成り立たないことからわかる。[$\mathbb{Z}_6$ は、加法群であることに注意。したがって、群の演算は積ではなく和で表わし、「逆元」は負元によって与えられることになる。]

$B$ は部分群である。というのは、

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\sigma^2 = \tau, \qquad \tau^2 = \sigma, \qquad \sigma\tau = e = \tau\sigma$$

であるから、$e$ が $S_3$ の単位元であることに注意すれば、(1) の性質がみたされる。さらに、

$$e^{-1} = e, \qquad \sigma^{-1} = \tau, \qquad \tau^{-1} = \sigma$$

より (2) も成り立つ。

[部分群の説明が不十分である者、多し。(i), (ii) の解答で、部分群の性質がどのように否定されるのか、あるいは確認されるのかの対比はもっと不十分であった。計算の要点を答案に記述することはもちろんであるが、それと同じくらい重要な点は、計算内容が何を目的にしていて、結果が何を意味しているのかについての簡潔な説明である。]

$\boxed{2}$

(i) 次の行列の行列式を計算し、逆行列が存在するための条件と逆行列を求めよ。

$$Z(a,b) = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+b \end{pmatrix}.$$

(ii) 行列の集まり

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+b \end{pmatrix}; a,\, b \text{ は複素数で } a^2+b^2 \neq 0 \text{ を満たす} \right\}$$

は行列の積で群になっていることを示せ。

(i)

$$\det \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+b \end{pmatrix} = (a-b)(a+b) + 2b^2 = a^2 + b^2$$

であるから、逆行列をもつ条件は、$a^2 + b^2 \neq 0$ であり、逆行列は、

$$Z(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a+b & -2b \\ b & a-b \end{pmatrix}.$$

(ii) まず、$Z(1,0)$ は単に行列であるから、$I \in G$ である。次に計算により

$$Z(a,b)Z(a',b') = Z(aa' - bb', ab' + a'b)$$

であることがわかるので、$G$ に含まれる 2 つの行列の積は、再び $G$ の元である。

最後に、逆元の存在は、(i) の結果を書き直した

$$Z(a,b)^{-1} = Z(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$$

より、$Z(a,b)^{-1} \in G$ であることからわかる。

[簡単にいうと、$G$ が $GL(2,\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ、ということである。したがって、ここでも部分群の性質に相当することを確認しないといけないのであるが、何を示すべきかについての理解が甚だしく不足している者が目立った。]