を導け。ここで、$\sqrt{it+0}$ は、

$$\sqrt{it+0} = \begin{cases} |t|e^{\pi i/4} & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \\ |t|e^{-\pi i/4} & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

で定められる $t \in \mathbb{R}$ の連続関数である。

課題：超関数の微分はどのように定義すべきか考察し、公式

$$h' = \delta$$

を正当化せよ。ここで、

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。（h はステップ関数または Heaviside function と呼ばれる。）

7　微分方程式とフーリエ変換

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を初期条件

$$u(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$v(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$
$$\dot{v}(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx,$$

波動方程式に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,\xi) = -\xi^2 v(t,\xi)$$

となって、これを初期条件に注意して解けば、

$$v(t,x) = \frac{i\xi\widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{it\xi} + \frac{i\xi\widehat{f}(\xi)-\widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{-it\xi}$$

$$u(t,x) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy.$$

熱伝導方程式 (heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (D>0)$$

を初期条件

$$u(0,x) = f(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}v(t,\xi)d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$v(0,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

また、上の $u(t,x)$ の表式を熱方程式に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\xi) = -D\xi^2 v(t,\xi)$$

となるので、これを解くと、

$$v(t,\xi) = e^{-D\xi^2 t}v(0,\xi) = e^{-D\xi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

従って、

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-Dt\xi^2+i(x-y)\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)}f(y)\,dy\end{aligned}$$

と求まる。

とくに、$f(x) = \delta(x)$ の場合（原点 $x = 0$ を瞬間的に強く熱した場合）は、

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

となる。

問 16. 時間の経過とともに、上の特殊解がどのように変化（拡散）していくか、グラフにプロットせよ。

半平面での Dirichlet 問題。

半平面 $y \geq 0$ におけるラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

を境界条件

$$f(x,0) = h(x), \qquad \lim_{y \to +\infty} f(x,y) = 0$$

の元で解いてみよう。

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, y) e^{ix\xi} d\xi$$

を代入すると、

$$(i\xi)^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

となるので、

$$F(\xi, y) = A(\xi) e^{\xi y} + B(\xi) e^{-\xi y}$$

と解くことができる。ここでさらに境界条件を考慮に入れると、

$$F(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \widehat{h}(\xi) e^{-y|\xi|}$$

を得るので、

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) e^{-|\xi| y} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \iint dt d\xi \, h(t) e^{-y|\xi|} e^{i(x-t)\xi} \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \end{aligned}$$

と求められる。

井戸型ポテンシャルを持った Schrödinger 方程式の解法。時間変数に関するフーリエ変換を考える。空間変数について、解の張り合わせ条件を調べる。

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(t,x)$$

$$V(x) = \begin{cases} b & \text{if } |x| \geq a, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

8　周期関数とフーリエ変換

周期的な関数 $f(x+L) = f(x)$ のフーリエ変換を、超関数の立場からながめてみよう。まず、フーリエ展開により、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

と書き表して、

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_n f_n e^{-ix(\xi-n)} \\ &= \sum_n f_n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix(\xi-n)} \\ &= 2\pi \sum_n f_n \delta(\xi - n) \end{aligned}$$

と計算すれば、周期関数のフーリエ変換がパルス関数（デルタ関数を平行移動したものの一次結合）で表されることがわかり、さらにこのパルス関数の逆フーリエ変換が、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi) = \sum_n f_n e^{inx}$$

となりフーリエ展開式が復元する。

ついでに、周期的とは限らない関数 $f(x)$ から、

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$$

で周期関数 g を作ったときのフーリエ係数を求めてみると、

$$\oint g(x)e^{-inx}dx = \sum_k \oint f(x+2\pi k)e^{-in(x+2\pi k)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dx = \widehat{f}(n)$$

となるので、次の等式を得る。

定理 8.1 (Poisson's summation formula).

$$\sum_{n} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

とくに、$f(x)=\delta(x)$ ととると、

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x+2\pi n).$$

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ が、

$$\widehat{f}(\xi)=0 \quad \text{for } |\xi|>\alpha$$

を満たすとき、$\widehat{f}(\xi)$ ($|\xi|\le\alpha$) を周期 2α の周期関数に拡張したものを g で表し、これにフーリエ展開を適用すれば、

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2\alpha}\sum_{n} e^{-i\pi n\xi/\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\widehat{f}(\eta)e^{i\pi n\eta/\alpha}d\eta \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\sum_{n} e^{-i\pi n\xi/\alpha} f(\pi n/\alpha) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} d\xi\frac{\pi}{\alpha}\sum_{n} f(\pi n/\alpha)e^{i\xi(x-\pi n/\alpha)} \\ &= \sum_{n} f(\pi n/\alpha)\frac{\sin(\alpha x-2\pi n)}{(\alpha x-2\pi n)} \end{aligned}$$

となる。すなわち、$f(x)$ の値がその離散化 $f(\pi n/\alpha)$ での値によって決定される。これを sampling theorem という。標本化定理と普通称されるが、ここでは「抜き取り定理」とでも呼んでおこう。ここで、

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}|\widehat{f}(\xi)|d\xi < +\infty$$

であるから、$f(x)$ は、x の解析的関数であることに注意。